

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 giugno 1907.

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisiologia. — *Laboratori scientifici del Monte Rosa.* Nota del Socio A. Mosso.

Il 15 del prossimo agosto, se il tempo lo permette, si apriranno i laboratori scientifici per le ricerche alpine al Col d'Olen, nell'altitudine di tremila metri sul Monte Rosa.

L'edificio comprende i laboratori di botanica, di batteriologia, di zoologia, di fisiologia, di fisica terrestre e di meteorologia. Per le ricerche a più grandi altezze sono disponibili una stanza per la fisiologia, una per la fisica terrestre ed una per alloggio nella Capanna Regina Margherita sulla punta Gnifetti a 4560 metri

I laboratori del Col d'Olen oltre alla biblioteca saranno provveduti del materiale necessario e degli strumenti che adoperansi più comunemente nelle rispettive ricerche.

I posti di studio sono diciotto; dei quali 5 appartengono all'Italia; 2 al Belgio; 2 all'Inghilterra; 2 alla Germania; 2 alla Francia; 2 all'Austria Ungheria; 2 alla Svizzera ed 1 all'America.

Oltre al tavolo di studio nei laboratori rispettivi, si darà gratis una camera per ciascun posto, coll'uso dei locali in comune come la sala da pranzo, la cucina, l'officina e la biblioteca.

Quelli che desiderano occupare questi posti devono indirizzare le domande al Ministero della Istruzione che dispone di due posti di studio, oppure alla sede centrale del Club Alpino, o alla sede della sezione di Milano del mede-

simo Club, o alla Facoltà medica nell' Università di Torino che ne posseggono uno ciascuno. Le informazioni che occorrono, le dà il Socio Angelo Mosso, Presidente della Commissione in Torino, al quale bisogna indicare le ricerche che si vogliono fare e il tempo che credesi necessario per esse. I posti vengono solo concessi a coloro che abbiano già fatto un tirocinio sperimentale in altri laboratori e sappiano svolgere un tema scientifico.

Matematica. — *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali totalmente ellittiche.* Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Sia

$$(1) \quad F(z) \equiv A(z) + \sum B_{ik}(xy) \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = F(xy),$$

$$\left[A(z) \equiv \sum_{i+k=2n} a_{im}(xy) \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^i \partial y^m}, i+k \leq 2n-1 \right]$$

una equazione lineare di ordine $2n$, i cui coefficienti in un campo C del piano xy siano funzioni finite e continue insieme colle loro derivate fino ad un ordine sufficientemente elevato che qui non precisiamo. Sia

$$(2) \quad G(u) \equiv A(u) + \sum_{i,k} b_{ik} \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} = 0 \quad (i+k \leq 2n-1)$$

l'equazione aggiunta di (1). Si sa allora che, detto Γ un campo interno a C in cui esistano e siano finite e continue z, u e le loro derivate di ordine $\leq 2n$ e detto γ il suo contorno, si ha:

$$(3) \quad \iint_{\Gamma} [u F(z) - z G(u)] dx dy = \int_{\gamma} [M dy - N dx]$$

M ed N essendo espressioni bilineari in u e nelle sue derivate di ordine $\leq 2n-1$, in z e nelle sue derivate di ordine $\leq 2n-1$. Se la z è soluzione di (1) e la u è soluzione di (2), la (3) diviene

$$(4) \quad \iint_{\Gamma} u F(xy) dx dy = \int_{\gamma} [M dy - N dx].$$

Si supponga di conoscere una *soluzione fondamentale* della (2): e cioè una funzione $u(xy; x_1 y_1)$ dipendente da un punto parametro $(x_1 y_1)$ che per $(x, y) \neq (x_1 y_1)$ abbia derivate di ordine $\leq 2n$ finite e continue e soddisfaccia (2), mentre per $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ abbia le derivate di ordine $2n-1$ infinite di 1° ordine — infinito principale essendo la inversa della distanza dei due punti (xy) ed $(x_1 y_1)$ — ed applichiamo la (4) prendendo come campo Γ il

campo $C - \tau$ che si ottiene da C escludendo con un piccolo cerchio τ il punto $(x_1 y_1)$. Si ottiene facilmente allora, facendo tendere a zero il campo τ , una formola analoga alla ben nota formola della teoria delle funzioni armoniche, esprimente la z soluzione di (1) per mezzo di un integrale di area esteso a C , e di integrali curvilinei estesi al contorno c di C :

$$(5) \quad z(x_1 y_1) = A(x_1 y_1) \left\{ \iint_C u F(xy) dx dy + \int_c \left[M dy - N dx \right] \right\}$$

$A(x_1 y_1)$ essendo una funzione dipendente dalla $u(xy; x_1 y_1)$ soltanto e non più dalla $z(xy)$.

Io mi sono proposto di mostrare l'esistenza delle soluzioni fondamentali e di trarre dalla formola (5) che così si deduce, alcune conseguenze circa le proprietà delle funzioni $z(xy)$ soluzioni di (1). Esporrò qui brevemente il metodo da me seguito ed i risultati ottenuti rimandando ad una più estesa Memoria di prossima pubblicazione per il minuto sviluppo di queste considerazioni.

2. Una soluzione fondamentale di (2) ha un punto singolare isolato: un noto teorema del Delassus ci fa allora presumere che non si avranno soluzioni fondamentali altro che quando la equazione (2) sia *totalmente ellittica*: abbia cioè tutte le caratteristiche immaginarie in C . Noi supporremo quindi senz'altro che le radici dell'equazione delle caratteristiche

$$(6) \quad \sum_{l+m=2n} a_{lm}(xy) \alpha^l = 0$$

siano tutte complesse in C , e siano ivi funzioni finite e continue insieme colle loro derivate di ordine $\leq 2n + 1$, ed abbiano sempre molteplicità costante. Indicheremo con $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n}$ le radici di (6).

Ciò premesso noi cercheremo di porre la soluzione fondamentale $u(xy; x_1 y_1)$ di (2) sotto la forma

$$(7) \quad u(xy; x_1 y_1) = \psi(xy; x_1 y_1) + \iint_C \psi(xy; \xi, \eta) f(\xi\eta; x_1 y_1) d\xi d\eta$$

valendoci delle due funzioni indeterminate f e ψ per modo di raccogliere sopra la $\psi(xy; x_1 y_1)$ tutte le condizioni dipendenti dal comportamento imposto alla $u(xy; x_1 y_1)$ nei punti $(xy) \equiv (x_1 y_1)$, sulla $f(\xi\eta; x_1 y_1)$ la condizione che la u soddisfaccia alla equazione (2). A ciò siamo indotti dalla osservazione che, ove la funzione $f(\xi\eta; x_1 y_1)$ sia finita e continua in tutto C , od anche diventi infinita di ordine ≤ 1 , nei punti $(\xi\eta) \equiv (x_1 y_1)$, la funzione $W(xy; x_1 y_1) = \iint_C \psi(xy; \xi\eta) f(\xi\eta; x_1 y_1) d\xi d\eta$ e le sue derivate hanno in $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ una singolarità con infinito di ordine minore di

quello della $\psi(xy; x_1 y_1)$ e delle derivate corrispondenti, per modo che realmente, ove la $\psi(xy; x_1 y_1)$ abbia il comportamento imposto alla $u(xy; x_1 y_1)$ e la $f(\xi\eta; x_1 y_1)$ siasi potuta determinare in modo che soddisfaccia — quanto al modo di comportarsi in $(\xi\eta) \equiv (x_1 y_1)$ — alle condizioni ora esposte, anche la (7) ha in $(x_1 y_1) \equiv (xy)$ il comportamento imposto alla $u(xy; x_1 y_1)$.

Trarremo di qui immediatamente una condizione cui deve soddisfare la ψ . Poichè la u ha derivate di ordine $2n-1$ infinite di ordine 1 nel punto $(xy) \equiv (x_1 y_1)$, essa, e similmente la ψ , avrà derivate di ordine $2n$ infinite di 2° ordine: ed affinchè la u soddisfaccia all'equazione (2) occorre che la somma dei termini di $G(u)$ che hanno singolarità di 2° ordine in $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ abbia una singolarità di ordine < 2 . Ora, se la u ha la forma (7), la somma dei termini di massima singolarità in $G(u)$ è proprio $\mathcal{A}(\psi(xy; x_1 y_1))$; quindi la funzione $\psi(xy; x_1 y_1)$ dovrà avere le derivate di ordine $2n$ singolari di 2° ordine in $(xy) \equiv (x_1 y_1)$, ma tali che l'espressione $\mathcal{A}(\psi(xy; x_1 y_1))$ abbia una singolarità di ordine < 2 soltanto. Guidato da questo concetto ho determinato nel modo che ora esporrò brevemente la funzione ψ ; la condizione che la $u(xy; x_1 y_1)$ data da (7) soddisfaccia a (2) si traduce allora in una equazione integrale per la $f(\xi\eta; x_1 y_1)$, che pel fatto medesimo che $\mathcal{A}(\psi)$ ha una singolarità di ordine < 2 in $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ rientra nel tipo studiato dal Fredholm e dall' Hilbert.

3. Il Somigliana (1), studiando un caso particolare del problema di cui qui trattiamo, era riuscito a determinare le soluzioni fondamentali delle equazioni totalmente ellittiche omogenee nelle derivate di ordine $2n$, ed a coefficienti costanti: in tal caso l'espressione $G(u)$ diviene $G(u) \equiv \mathcal{A}(u)$ ed i coefficienti di $\mathcal{A}(u)$ e quindi anche le radici della equazione delle caratteristiche sono costanti. Supponiamo, per fissare le idee, che queste radici siano tutte semplici: la soluzione del Somigliana ha allora la forma seguente

$$(8) \quad \psi(xy; x_1 y_1) \equiv \sum_1^{2n} d_j \sigma_j(xy; x_1 y_1)^{2n-2} \log \sigma_j(xy; x_1 y_1)$$

dove $\sigma_j \equiv (x - x_1) \alpha_j + y - y_1$, e dove i coefficienti d_j sono formati anche essi colle radici α_j di (6) e determinati in modo che la funzione (8) risulti monodroma in tutto il piano reale.

Supponiamo ora che le a_{im} e quindi le α_j non siano costanti e consideriamo ancora la funzione (8) medesima, essa non soddisferà più, come quando la α_j e quindi le d_j erano costanti, all'equazione $\mathcal{A}(\psi) = 0$. Ma è facile vedere, scrivendo esplicitamente le derivate successive della funzione (8) che i termini di massima singolarità si ottengono eseguendo la derivazione

(1) Somigliana, *Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali*. Annali di Matematica, tomo XXII, § 2.

come se le α_j e quindi le d_j fossero costanti. Ne segue che la funzione ψ data da (8) ha le singolarità volute in $(xy) \equiv (x_1 y_1)$, ma che formando la $\mathcal{A}(\psi)$, questa ultima espressione non avrà che una singolarità di ordine ≤ 1 ; appunto come si era riconosciuto necessario nel n° precedente. Assumeremo quindi la (8) come funzione $\psi(xy; x_1 y_1)$. Analoghe considerazioni valgono quando la radici non sono tutte semplici.

4. Si consideri ora la funzione

$$(9) \quad W(xy) = \iint_C \psi(xy; \xi \eta) f(\xi \eta) d\xi d\eta.$$

Si dimostra facilmente:

1°. La funzione $W(xy)$ è una funzione finita e continua in C insieme colle sue derivate dei primi $2n - 1$ ordini, in tutti i punti in cui la funzione $f(xy)$ è finita e continua: le derivate si ottengono derivando sotto il segno. Nei punti in cui $f(xy)$ diviene infinita di ordine ≤ 1 le derivate $(2n - 1)$ esime di W hanno una singolarità al più logaritmica.

2°. Nei punti dove la funzione $f(xy)$ ha derivate finite, [od anche è tale che i suoi rapporti incrementali rimangono sui raggi per (xy) uniformemente integrabili anche ridotti ai loro valori assoluti] la funzione $W(xy)$ ammette derivate di ordine $2n$. Ed in questi punti si ha

$$(10) \quad \mathcal{A}(W) = 2\pi(2n - 2)! f(xy) a_{2n0}(xy) + \iint_C k(xy; \xi \eta) f(\xi \eta) d\xi d\eta$$

$k(xy; \xi \eta)$ essendo una funzione che in $(xy) \equiv (\xi \eta)$ non ha che una singolarità al più di 1° ordine.

Applichiamo questi risultati alla funzione (7). Ammettendo per un momento che la funzione $f(\xi \eta; x_1 y_1)$ sia tale che all'integrale del secondo membro si possano applicare i teoremi enunciati sopra per la derivazione della funzione $W(xy)$, noi otteniamo che la condizione che la (7) soddisfaccia alla (2) si traduce in una equazione integrale del tipo

$$(11) \quad f(xy; x_1 y_1) + \iint_C \chi_1(xy; \xi \eta) f(\xi \eta; x_1 y_1) d\xi d\eta + \varphi(xy; x_1 y_1) = 0$$

dove la χ_1 è una funzione che nel punto $(xy) \equiv (\xi \eta)$ diviene infinita di ordine ≤ 1 , ad essa si può quindi applicare la teoria di Fredholm.

Distinguiamo allora due casi:

1°. La equazione (11) ha il determinante $\neq 0$: essa è quindi risolubile: si verifica a posteriori che la funzione $f(xy; x_1 y_1)$ risolvete la (11) soddisfa a quelle proprietà relative al suo comportamento nei punti di C per cui è legittima la deduzione di (11) da (2). Il problema è così totalmente risoluto.

2°. La equazione (11) ha il determinante $= 0$. Esisterà allora un numero finito m di funzioni eccezionali φ che risolvono l'equazione omogenea $\varphi(xy) + \int_C \chi_1(x_1 y_1; xy) \varphi(x_1 y_1) dx_1 dy_1 = 0$: siano esse $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_m$. Affinchè la equazione (11) ammetta soluzione è necessario e sufficiente che sia

$$\int_C \varphi_i(xy) \varphi(xy; x_1 y_1) dx dy = 0$$

qualunque siano i ed $(x_1 y_1)$. In questo caso conviene modificare leggermente la forma (7) imposta ad $u(xy; x_1 y_1)$: cercheremo di porre la funzione nella forma

$$(7') \quad u(xy; x_1 y_1) = \psi(xy; x_1 y_1) + \int_C \psi(xy; \xi \eta) f(\xi \eta; x_1 y_1) d\xi d\eta - \sum_j^m \lambda_j(x_1 y_1) v_j(xy)$$

le $v_j(xy)$ essendo funzioni arbitrarie ⁽¹⁾, e le $\lambda_j(x_1 y_1)$ essendo da determinarsi convenientemente. Applicando a (7') i processi applicati a (7) otteniamo una equazione analoga a (11):

$$(11') \quad f(xy; x_1 y_1) + \int_C \chi_1(xy \xi \eta) f(\xi \eta; x_1 y_1) + d\xi d\eta + \\ + \left[\varphi(xy; x_1 y_1) - \sum_j^m \lambda_j(x_1 y_1) t_j(xy) \right] = 0$$

dove le $t_j(xy)$ sono funzioni formate colle $v_j(xy)$ e colle loro derivate. Si determinano allora le funzioni $\lambda_j(x_1 y_1)$ in modo che siano soddisfatte le equazioni

$$\sum_j \lambda_j(x_1 y_1) \int_C \varphi_i(xy) t_j(xy) dx dy = \int_C \varphi_i(xy) \varphi(xy; x_1 y_1) dx dy \quad (2).$$

Dopo di che (11') sarà certamente risolubile, e determinerà una funzione f che soddisfa alle solite condizioni sotto le quali sono legittimi i ragionamenti precedenti. Quindi anche in questo caso il problema della ricerca delle soluzioni fondamentali è completamente risoluto.

Si verifica che la funzione così costruita, sia essa data da (7) oppure da (7'), è tale che la funzione $A(x_1 y_1)$ che da essa dipende e compare in (5) esiste ed è regolare in tutto C . Onde si conchiude che la soluzione fonda-

(1) Sottoposte alla sola condizione di disuguaglianza di cui nella nota che segue.

(2) Queste equazioni sono risolubili appena che le $v_j(xy)$ sono scelte per modo che il determinante i cui elementi sono $\delta_{ij} = \int_C \varphi_i(xy) t_j(xy) dx dy$, sia diverso da zero. È questa l'unica condizione cui sono sottoposte le v e cui si è fatto cenno nella nota precedente.

mentale trovata è atta alla deduzione della formula (5) come noi abbiamo rapidamente indicato nel n° 1.

5. Una delle più importanti applicazioni della formula (5) sta nella dimostrazione del carattere analitico delle soluzioni di (1). Sulla formula analoga per le funzioni armoniche e più in generale per le soluzioni delle equazioni di secondo ordine *prive di termine noto*, si fonda l'ordinaria dimostrazione dell'analiticità di queste funzioni; essa è allora immediata conseguenza del carattere analitico della soluzione fondamentale e del fatto che in questo caso manca in (5) l'integrale di area. Quando vi è termine noto si dovette ricorrere fin qui a sviluppi in serie convenienti, perchè il presentarsi dell'integrale di area nella (5) pareva rendesse impossibile una estensione della formula medesima al campo complesso.

Volendo dimostrare il carattere analitico delle soluzioni di (1), noi dovremo studiare il carattere analitico delle soluzioni fondamentali trovate: ma allora la forma stessa (7) o (7') che a queste noi abbiamo assegnato ci porta ad occuparci di un integrale di area affatto simile a quello che compare in (5), onde ci sarà poi affatto indifferente supporre che (1) abbia o no termine noto.

Con ragionamenti su cui qui non possiamo insistere si vede che tutta la questione viene ad aggirarsi sulla natura analitica della $\psi(xy; x_1, y_1)$ e

degli integrali del tipo $W(xy) = \iint_C \psi(xy; x_1, y_1) f(x_1, y_1) dx_1 dy_1, f(x_1, y_1)$

indicando una funzione analitica di x_1, y_1 . La funzione $\psi(xy; x_1, y_1)$ è una funzione analitica sia di xy , che di x_1, y_1 ; però nel campo complesso le infinite determinazioni che essa può avere corrispondentemente alle varie determinazioni dei logaritmi che compaiono in (8), non restano più distinte, come invece accadeva nel campo reale. Onde se noi ad (xy) nell'integrale che definisce $W(xy)$ diamo valori complessi esso perde ogni senso. Io dimostro che però in un certo campo complesso contenente il campo C (¹), la funzione $W(xy)$ si può prolungare analiticamente: e precisamente per tali punti essa è data

dall'integrale $\iint_{\Gamma(xy)} \psi(xy; x_1, y_1) f(x_1, y_1) dx_1 dy_1$ esteso al cono $\Gamma(xy)$ che dal punto (xy) proietta i punti del contorno c di C . Fondandomi su questo teorema riesco a dimostrare l'analiticità delle soluzioni di (1).

Noterò che dal teorema medesimo scende in particolare l'estensione al campo complesso della ordinaria formula di Green: per essa il valore in un punto (x_1, y_1) di una soluzione dell'equazione $\Delta_2 s = f(xy)$ — dove $f(xy)$ è una funzione analitica di x ed y — è rappresentato pei punti (x_1, y_1) che hanno

(¹) I punti di questo campo complesso soddisfano alla condizione che la loro distanza dal piano reale è minore eguale ad una certa frazione della distanza della proiezione del punto sul piano reale dal contorno c di C .

Fisica. — *Sopra alcuni problemi di aerodinamica.* Nota di LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. SELLA.

Nella Brigata Specialisti del Genio militare, avente sede in Roma, esiste un ventilatore, molto potente e molto ben costruito, il quale, mediante opportuna camera di compressione, può fornire, da una luce di ottanta per ottanta centimetri, una corrente d'aria *non vorticosa* della velocità di venticinque metri al secondo.

Approfittando del cortese consenso del sig. Comandante la Brigata, io ho potuto, col concorso del sig. tenente Crocco, ufficiale addetto al riparto aerodinamico, istituire una serie di curiosi esperimenti, rivolti a cercare la spiegazione di un fenomeno che ho qui l'onore di descrivere ⁽¹⁾.

Innanzi alla bocca del ventilatore ora detto presentiamo la parte piana di un bastoncello semicilindrico, imperniato ad un manubrio, in modo che sia libero di rotare in un senso o nell'altro, ma non di retrocedere. Se assumiamo, per precisare le idee, un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, e supponiamo che il vento venga dalla direzione positiva dell'asse delle x , il solido che noi consideriamo sarà il luogo dei punti corrispondenti a queste limitazioni:

$$x \leq 0, \quad x^2 + z^2 \leq r, \quad -k \leq y \leq k,$$

dove assegniamo ad r la lunghezza, per esempio di un centimetro, e a k la lunghezza di sette centimetri e mezzo. Il pernio attraverserà il bastoncello secondo l'asse delle x , e il manubrio starà nella regione delle x negative. Il solido ora definito è libero di ruotare, strisciando colla sua faccia piana sul piano yz , ma il contrasto del vento gl'impedisce di avanzare verso le x positive, e il contrasto del manubrio gl'impedisce di retrocedere verso le x negative.

Presentato senz'altro, nel modo ora descritto, il bastoncello all'azione del vento, esso riceve un sistema di spinte parallele che si scaricano sul pernio, e, se anche riceve, come vedremo, altre spinte, la simmetria di queste

(1) Il sig. Patrick, in una Comunicazione al IV Congresso d'aerostazione, tenutosi in Pietroburgo nell'estate 1905, dimostrò d'aver osservato un caso molto simile a quello al quale si riferisce la fig. 1. Il sig. Patrick praticava una scanalatura longitudinale sulla faccia piana del semicilindro. Ma già nel 1897 il sig. P. La Cour aveva applicato ai molini a vento questo ordine di idee (*Försök med små Möllenmodeller*. Ingeniören 1897). Recentemente il sig. Riabouschinsky, coadiuvato da egregi studiosi, ha istituito, in un laboratorio eccellente, una serie di notevoli esperienze. Vedere il Bulletin de l'Institut Aérodynamique de Koutchino, fasc. I, 1906, pag. 18 e seg.

è tale che esso rimane immobile. Ma se invece imprimiamo al bastoncino un movimento di rotazione intorno all'asse delle x , sia in un senso, come anche nel senso opposto, noi vediamo che questa rotazione si accelera e tende a diventare molto notevolmente veloce.

L'intera spiegazione, *quantitativa* del fenomeno si presenta molto difficile: sarebbe, nel presente stato della fisica matematica, un arduo problema quello di voler determinare razionalmente l'espressione analitica delle leggi di questo moto. Ma, senza pregiudizio di un ulteriore esame, più matematico, noi possiamo abbastanza facilmente formarci una spiegazione *qualitativa*, avvalorata, come si vedrà, da caratteristici esperimenti.

È noto che, se un corpo si muove nell'aria, ed in generale in un mezzo resistente, esiste, intorno alla *prora* del corpo, una zona di molecole del fluido,

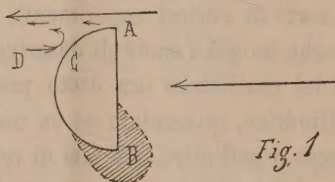


Fig. 1

che non hanno velocità relativa rispetto al moto del corpo. Tale zona costituisce la cosiddetta *prora fluida*, la presenza della quale è stata da molto tempo osservata per le navi nell'acqua, e per le palle lanciate dalle armi da fuoco nell'aria. La natura pratica del presente lavoro c'impedisce di entrare in discussioni analitiche relative a questo fenomeno, che è stato attentamente e variamente studiato.

Supponiamo che al semicilindro da noi considerato si imprima una rotazione iniziale: per fissare le idee, supponiamo che inizialmente si faccia diminuire con violenza la z del punto $(0, k, r)$, che chiameremo punto A; con ciò diminuirà in ugual misura la z del punto $(0, k, -r)$ che chiameremo B, e cresceranno in ugual misura quelle di $(0, -k, r)$, $(0, -k, -r)$.

Intorno allo spigolo definito dalle relazioni $x=0, z=-r, 0 \leq y \leq k$, come anche intorno all'altro definito da $x=0, z=r, 0 \geq y \geq -k$, si formerà una prora fluida. Questa sarà dovuta a due diverse azioni, una che l'aria spinta dal ventilatore esercita sulla faccia piana del bastoncino che le si oppone, l'altra che l'aria esercita resistendo alla rotazione del bastoncino.

Se, per semplicità, consideriamo soltanto la sezione eseguita col piano limitante $y=k$, noi possiamo all'incirca rappresentarci la prora fluida come risulta dalla parte tratteggiata della fig. 1. Ciò avverrebbe ugualmente se c'immaginassimo soppresso il ventilatore ed animato l'apparecchio, non soltanto della rotazione nel senso da A verso B, ma anche di un'opportuna traslazione verso le x positive.

Così stando le cose, la nuova aria, che sopravviene dal ventilatore, non trova da investire una faccia piana, ma investe, come si vede dalla figura, una vera paletta di elica, dunque accelera la rotazione nel senso da A verso B.

Ma, oltre a questo, l'aria spinta dal ventilatore, tende anche a distaccare la prora fluida dalla parete curva posteriore del semicilindro, e determina, in contatto con questa parete, un forte risucchio; l'azione che ne risulta cospira a far ruotare il sistema nel verso indicato.

Non è ancora tutto. Un'altra azione cospirante a farlo così ruotare è dovuta al *mollente*, che si forma nelle vicinanze di A (e di tutto il relativo spigolo, e, simmetricamente, in modo cospirante, anche dalla parte delle y negative). I filetti fluidi, spinti dal ventilatore, sfiorando A, richiamano violentemente le molecole d'aria più vicine, che stanno nella regione D relativamente tranquilla; le altre molecole della stessa regione, le quali si trovano alquanto più lontane, si precipitano a sostituire le altre che più velocemente hanno seguito il filetto fluido; ed alcune, battendo in punti come C (fig. 1), imprimono una vera spinta verso il basso.

Nelle correnti d'acqua molto veloci, per esempio l'Adige, che presenta, in alcuni tratti ed in alcune stagioni, velocità superiori ai quattro metri al secondo, basta un piccolo promontorio, una pila di ponte, uno zatterone ancorato, per determinare il fenomeno ora descritto del *mollente*: i barcaioli conoscono bene i pericoli di questi *tagli di corrente*. Per vedere che importanza abbia questo fenomeno nell'aria, noi abbiamo, sull'esempio di Kousnetzov ⁽¹⁾, costruito un altro modellino, ed eseguita una decisiva esperienza.

Consideriamo un solido, costituito dalla rigida, geometrica unione di un cubo e di due prismi triangolari, così definiti nel precedente sistema:

1. $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$,
2. $-1 \leq x \leq 1$, $x - z \leq 0$, $-1 \leq z \leq 1$, $1 \leq y \leq 7,5$
3. $-1 \leq x \leq 1$, $x + z \leq 0$, $-1 \leq z \leq 1$, $-1 \leq y \leq -7,5$

dove i numeri esprimono centimetri. Chi volesse vederne la figura in prospettiva, potrebbe consultare il citato Bollettino di Riabouschinsky a pag. 19.

Limitiamoci intanto a esaminare una sezione piana, per esempio quella col piano limite $y = k$.

Esponendo la faccia AB al ventilatore, noi vediamo che, anche senza una spinta iniziale, il bastoncino incomincia abbastanza rapidamente a ruotare nel verso da A a B. Ciò è determinato dalla spinta che il mollente imprime nei punti come C, o, per meglio dire, dalla componente verticale di questa spinta.

⁽¹⁾ Riabouschinsky, loc. cit., pag. 19.

Ma noi possiamo subito osservare, con un'esperienza sulla quale richiamiamo in modo speciale l'attenzione del lettore, che l'azione dovuta al molle ora detto è notevolmente meno efficace delle altre dovute alla prora fluida. È facile vedere che, se incliniamo di una trentina di gradi, *a sinistra*, rispetto alla direzione del vento, l'apparecchio, in modo cioè che il pernio non segua più l'asse della x , ma, per esempio, la retta $z = 0 \quad x + y\sqrt{3} = 0$, l'apparecchio funziona all'incirca come un'elica e si mette rapidamente a

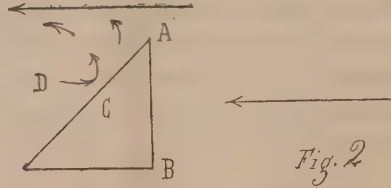


Fig. 2

rotare da B verso A, con una rotazione contraria, cioè, a quella che assume quando si espone *frontalmente*, nel modo sopra indicato, al ventilatore. Se la rotazione ultimamente descritta (da B verso A) è diventata *sufficientemente rapida*, riportando l'apparecchio in posizione frontale, noi vediamo che il movimento continua nello stesso senso. Se la rotazione *non era sufficiente-*

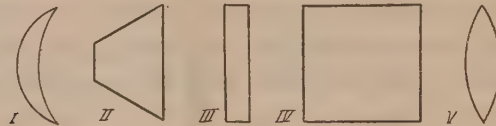


Fig. 3

mente rapida, l'apparecchio a poco a poco si ferma, e poi si mette a ruotare inversamente (da A verso B).

Non insisterò molto sopra altri esperimenti, che potrebbero iniziare una serie di osservazioni non soltanto qualitative: mi basterà d'accennare che la sezione indicata nella fig. 1, esposta col dorso curvo verso il vento, anche con un forte impulso iniziale, tende rapidamente a fermarsi, e che fra le sezioni descritte nella fig. 3, il fenomeno si presenta notevole per le sezioni I e II, meno notevole per la III, meno ancora per la IV, e non si presenta per la V. Per la sezione IV è necessaria una fortissima velocità iniziale di rotazione ed una forte velocità della corrente d'aria, affinché il fenomeno si presenti.

Debbo aggiungere che ho ripetuto questi esperimenti, con identico successo, in una grossa carrozza automobile, spinta a velocità differenti; in

tale caso, l'aria incontrata presentava rispetto a me una velocità relativa, identicamente paragonabile alla velocità dell'aria del ventilatore.

Riserbandomi di studiare in modo più esauriente questi curiosi fenomeni, anche nelle correnti d'acqua ⁽¹⁾, credo che non sia male aver accennato a tre elementi di spiegazione, dei quali, in uno studio razionale del fenomeno, nemmeno uno dovrà essere trascurato.

Meccanica. — *Sul moto di una sfera in un liquido viscoso.*
Nota del prof. GIUSEPPE PICCIATI, presentata dal Corrispondente
T. LEVI-CIVITA.

I primi problemi relativi al moto di corpi solidi in liquidi viscosi sono stati trattati dallo Stokes, il quale nel suo classico lavoro ⁽²⁾, *On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums*, studia il moto oscillatorio lento ⁽³⁾ di un piano, di una sfera e di un cilindro, ed anche il moto traslatorio lento di una sfera, il cui centro si muove in linea retta con velocità uniforme.

Altri casi di moti stazionari e di moti oscillatori lenti sono stati posteriormente studiati; però dei problemi che si riferiscono al moto vario e lento di un solido in un liquido viscoso, quando si considerino, per esempio, il corpo ed il solido soggetti ad una forza esterna costante come la gravità, uno solo, che io sappia, è stato trattato dal Basset ⁽⁴⁾: quello di una sfera pesante.

La trattazione di questo problema fatta dal Basset è però tutt'altro che semplice, chiara e completa. L'autore suppone dapprima che la sfera si muova con velocità uniforme in linea retta, nel liquido inizialmente in quiete, ed in un modo complicatissimo determina la così detta funzione di corrente di Stokes, da cui dipende il movimento del liquido. Da questo caso passa a quello in cui la sfera si muove con velocità variabile, quindi, determinata la resistenza che la sfera incontra a muoversi nel liquido viscoso, studia il moto della sfera pesante. L'equazione a cui giunge, e che determina la velocità di questo moto, non è però da lui integrata che nell'ipotesi particolare in cui il coefficiente cinematico di viscosità sia una quantità tanto piccola che di esso si possano trascurare la prima o la seconda potenza.

Lo stesso problema si può invece risolvere direttamente, supponendo la velocità della sfera variabile e qualunque le condizioni iniziali del liquido,

⁽¹⁾ Riabouschinsky, loc. cit., pag. 39 e seg.

⁽²⁾ Math. and. Phys. Papers, t. III, Cambridge, 1901.

⁽³⁾ Si chiama così il moto quando è tale che si possono trascurare i quadrati ed i prodotti delle componenti della velocità e loro derivate.

⁽⁴⁾ *A Treatise on Hydrodynamics*, t. II, pag. 285, Cambridge, 1888.

ric conducendo con una semplice osservazione l'equazione da cui dipende la funzione di corrente a quella della propagazione del calore in un filo.

Oggetto della presente Nota è l'esposizione di questo semplice risultato con cui si determina la funzione di corrente, quindi il moto lento provocato dalla sfera nel liquido e la resistenza da essa sopportata. Mi propongo di discutere in seguito i risultati relativi al moto della sfera pesante nel liquido viscoso.

1. Le equazioni generali del moto dei fluidi viscosi incompressibili, soggetti a forze conservative, sono ⁽¹⁾

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla_u^2, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla_v^2, \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla_w^2, \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

ove

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z},$$

essendo u, v, w le componenti della velocità del fluido relative agli assi fissi x, y, z ; U il potenziale delle forze, p la pressione, ρ la densità del fluido e ν il coefficiente cinematico di viscosità (quoziente del coefficiente di viscosità od attrito interno k per la densità ρ del fluido). Gli sforzi specifici dipendono dalle caratteristiche della deformazione secondo le note formule

$$(3) \quad \begin{cases} X_x = p - 2k \frac{\partial u}{\partial x}, & X_y = Y_x = -k \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ Y_y = p - 2k \frac{\partial v}{\partial y}, & Y_z = Z_y = -k \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ Z_z = p - 2k \frac{\partial w}{\partial z}, & Z_x = X_z = -k \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \end{cases}$$

Nel caso di moti « lenti », cioè tali che si possano trascurare i quadrati ed i prodotti di u, v, w e loro derivate, le (1) assumono la forma più semplice

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla_u^2, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla_v^2, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla_w^2. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Vedi per es. Basset, op. cit., oppure le belle *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*, del sig. M. Brillouin, Paris, 1907.

Circa le condizioni relative all'attrito alle pareti si possono considerare due casi: che si abbia aderenza completa, ciò che si verifica quando i liquidi bagnano la parete, oppure che vi sia scorrimento parziale del liquido sulla parete. Considerando il caso dell'aderenza completa la condizione relativa alla parete è la seguente: la velocità del fluido è uguale a quella della parete con cui è in contatto.

2. Una sfera di raggio α , immersa in un liquido indefinito, sia dotata di moto traslatorio, il suo centro descrivendo con la velocità $V(t)$ una linea retta, che assumiamo per asse z . Supporremo che vi sia simmetria rispetto alla direzione del moto, cioè che il moto del liquido abbia luogo, anche inizialmente, in piani passanti per l'asse z e sia lo stesso in tutti i piani: esso può allora essere determinato per mezzo della funzione di corrente di Stokes. Supporremo inoltre la velocità del moto traslatorio della sfera tale che il moto del liquido abbia sempre il carattere di moto lento; valgono quindi per esso le equazioni (4), le quali sono riferite ad assi fissi.

Riferiamoci invece ad assi passanti per il centro della sfera, descrivente con la velocità $V(t)$ l'asse z , e sia ζ la sua distanza dall'origine fissa al tempo t . Seguitando a chiamare x, y, z le coordinate dei punti, riferite al centro della sfera come origine, essendo $w = f(x, y, z + \zeta, t)$ sarà

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} V(t) = \frac{\partial f}{\partial t}$$

giacchè il secondo termine, essendo dell'ordine del quadrato della velocità, deve essere trascurato per l'approssimazione considerata. Le equazioni (4) conservano quindi la stessa forma, siano esse riferite agli assi fissi o mobili coll'origine nel centro della sfera.

Il moto del liquido avvenendo in piani passanti per l'asse z , ed essendo lo stesso per tutti, conviene servirci delle coordinate polari r, ϑ, φ .

La componente secondo φ della velocità di una generica particella fluida è manifestamente nulla; dette R, θ le componenti secondo r, ϑ (nel senso in cui crescono gli argomenti) avremo:

$$(5) \quad \begin{cases} u = (R \sin \vartheta + \theta \cos \vartheta) \cos \varphi, \\ v = (R \sin \vartheta + \theta \cos \vartheta) \sin \varphi, \\ w = R \cos \vartheta - \theta \sin \vartheta. \end{cases}$$

Le equazioni del moto del liquido in coordinate polari, tutto essendo indipendente da φ , sono quindi (1)

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \left(\nabla^2 R - \frac{2R}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} - \frac{2\theta}{r^2} \cotg \vartheta \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + \nu \left(\nabla^2 \theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \theta \right), \end{cases}$$

$$(7) \quad \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} + \frac{2R}{r} + \frac{\theta}{r} \cotg \vartheta = 0,$$

(1) Basset. op. cit., pag 244.

dove il simbolo ∇^2 è definito da

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right).$$

Indicando con ψ la funzione di corrente di Stokes si può porre

$$(8) \quad R = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \quad \theta = - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial r};$$

così resta intanto soddisfatta la (7).

L'equazione a cui deve soddisfare la ψ si ottiene eliminando $U - \frac{p}{\rho}$ fra le (6); le condizioni ai limiti si hanno ricordando che la velocità del fluido per $r = a$ deve essere uguale a quella dei punti della sfera, quindi

$$(R)_{r=a} = V(t) \cos \vartheta \quad (\theta)_{r=a} = - V(t) \sin \vartheta;$$

all'infinito poi il liquido deve rimanere in quiete. Ciò dà per la ψ le condizioni

$$(9) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right)_{r=a} = V(t) \sin \vartheta \cos \vartheta, & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=a} = V(t) \sin^2 \vartheta, \\ \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right)_{r=\infty} = 0, & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=\infty} = 0, \end{cases}$$

a cui deve aggiungersi quella relativa allo stato iniziale.

Si riesce a rendere il problema indipendente da ϑ ponendo

$$(10) \quad \psi = \sin^2 \vartheta \cdot f(r, t);$$

si trova infatti che per soddisfare all'equazione indefinita, risultante dall'eliminazione di $U - \frac{p}{\rho}$ fra le (6), è necessario e basta che la f verifichi la

$$(11) \quad \Omega \left(r \Omega - \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0,$$

con $\Omega f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2f}{r^2}$. Dalle (9) seguono le condizioni ai limiti

$$(12) \quad \begin{cases} (f)_{r=a} = \frac{a^2 V(t)}{2}, & \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{r=a} = a V(t), \\ \left(\frac{f}{r^2} \right)_{r=\infty} = 0, & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{r=\infty} = 0; \end{cases}$$

la condizione iniziale sarà della forma

$$(12)' \quad (f)_{t=0} = \chi(r),$$

essendo, a norma della (10), $\sin^2 \vartheta \cdot \chi(r)$ la funzione di corrente caratterizzante lo stato iniziale del fluido. Per l'ipotesi ammessa dell'aderenza completa del liquido alla superficie della sfera le condizioni (12) dovranno valere anche per $t=0$; questo porta per la $\chi(r)$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi(a) = \frac{a^2}{2} V(0) \quad , \quad \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} \right)_{r=a} = aV(0) \, , \\ \left(\frac{\chi}{r^2} \right)_{r=\infty} = 0 \quad , \quad \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)_{r=\infty} = 0 \, . \end{array} \right.$$

Posto

$$(14) \quad v\Omega f - \frac{\partial f}{\partial t} = f_0 \, ,$$

la (11) diviene

$$\Omega f_0 = \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} f_0 = 0 \, ,$$

il cui integrale generale è

$$f_0 = \frac{C_1}{r} + r^2 C_2 \, ,$$

con C_1, C_2 costanti rispetto ad r ma funzioni arbitrarie dell'altra variabile t : gioverà designarle con $-\frac{d\omega}{dt}$, $-\frac{d\sigma}{dt}$. Essendo così $f_0 = -\frac{1}{r} \frac{d\omega}{dt} - r^2 \frac{d\sigma}{dt}$, ove si ponga

$$(15) \quad f = f_1 + \frac{\omega}{r} + r^2 \sigma$$

la (14) si semplifica in

$$(14)' \quad v\Omega f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0 \, .$$

Convien eseguire un'ulteriore trasformazione sostituendo all'incognita f_1 una funzione f_2 , legata ad essa dalla relazione

$$(16) \quad f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{f_1}{r} \, ;$$

da questa si trae, derivando rispetto a t e tenendo conto della (14)',

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = v \left(\frac{\partial}{\partial r} \Omega f_1 + \frac{1}{r} \Omega f_1 \right) = v \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} \, .$$

Essendo f_2 integrale di quest'ultima equazione la (16) dà per f_1

$$f_1 = \frac{1}{r} \int r f_2 \, dr \, :$$

mettendovi in evidenza il raggio a della sfera come limite inferiore di integrazione si può scrivere

$$(17) \quad f_1 = \frac{1}{r} \int_a^r \alpha f_2(\alpha, t) d\alpha + \frac{C}{r}$$

dove la costante C di integrazione (funzione di t) va presa in modo da soddisfare la (14)'.

Del resto per il nostro scopo, che è di risalire alla f , si può senz'altro prescindere dal termine $\frac{C}{r}$ poichè, attesa l'arbitrarietà di ω , esso rimane

incluso in $\frac{\omega}{r}$. Così dalle (15) e (17) si ha infine

$$(18) \quad f = \frac{1}{r} \int_a^r \alpha f_2(\alpha, t) d\alpha + \frac{\omega}{r} + r^2 \sigma,$$

dovendovisi risguardare f_2 integrale dell'equazione della propagazione del calore in un filo,

$$(19) \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = v \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2}.$$

Le condizioni ai limiti (12), (12)', ove si introduca per f il valore (18), divengono

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{a} + a^2 \sigma = \frac{a^2}{2} V(t), \quad (f_2)_{r=a} - \frac{\omega}{a^2} + 2a\sigma = aV(t), \\ \left[\frac{1}{r^3} \int_a^r \alpha f_2 d\alpha + \frac{\omega}{r^3} (r^3) + \sigma \right]_{r=\infty} = 0, \\ \left[\frac{f_2}{r} - \frac{1}{r^3} \int_a^r \alpha f_2 d\alpha - \frac{\omega}{r^3} + 2\sigma \right]_{r=\infty} = 0, \\ \frac{1}{r} \int_a^r \alpha (f_2)_{t=0} d\alpha + \frac{1}{r} (\omega)_{t=0} + r^2 (\sigma)_{t=0} = \chi(r). \end{array} \right.$$

A queste si soddisfa prendendo

$$\sigma = 0, \quad \omega = \frac{a^3}{2} V(t)$$

ed imponendo ad f_2 le condizioni

$$(21) \quad (f_2)_{r=a} = \frac{3a}{2} V(t), \quad (f_2)_{t=0} = \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\chi}{r}, \quad \lim_{r=\infty} f_2 = 0.$$

Riepilogando: si ha per la funzione di corrente

$$(22) \quad \psi = \text{sen}^2 \vartheta \left\{ \frac{1}{r} \int_a^r \alpha f_2(\alpha, t) d\alpha + \frac{a^3 V(t)}{2r} \right\},$$

dove f_2 è l'integrale della (19) caratterizzato dalle (21): l'espressione della f_2 è (1):

$$(23) \quad f_2(r, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi vt}} \int_a^\infty \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta} \right) \left[e^{\frac{-(\beta-r)^2}{4vt}} - e^{\frac{-(\beta-2a+r)^2}{4vt}} \right] d\beta + \\ + \frac{3a}{4\sqrt{\pi v}} \int_0^t V(\tau) e^{\frac{-(r-a)^2}{4v(t-\tau)}} (r-a)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau.$$

La ψ così determinata risolve in modo generale il problema del moto lento provocato nel fluido dalla traslazione della sfera.

Se si suppone V costante e t sufficientemente grande, perchè il moto della sfera sia sensibilmente divenuto stazionario, la (23) dà per f_2 ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_2 = \frac{3aV}{\sqrt{\pi}} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\frac{r-a}{2\sqrt{vt}}}^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{3aV}{2};$$

segue allora dalla (22)

$$\psi = \frac{Va^2}{4} \text{sen}^2 \vartheta \left\{ \frac{3r}{a} - \frac{a}{r} \right\},$$

che è la nota espressione, data da Stokes, corrispondente al caso del moto stazionario della sfera.

3. Calcoliamo la resistenza diretta Z che la sfera incontra muovendosi nel liquido viscoso; essa è

$$Z = \int_{\sigma} (Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz) d\sigma,$$

dove n indica la normale ad un generico elemento superficiale $d\sigma$ della sfera (volta verso l'esterno). Per le (3) e (5) si ha

$$Z = 2\pi a^2 \int_0^\pi \left[\left(p - 2k \frac{\partial R}{\partial r} \right) \cos \vartheta + \right. \\ \left. + k \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \vartheta} - \frac{\theta}{r} \right) \text{sen} \vartheta \right]_{r=a} \text{sen} \vartheta d\vartheta,$$

quindi dalle (8), (21), (22) risulta

$$Z = 2\pi a \int_0^\pi \left\{ (p)_{r=a} a \cos \vartheta + k \left[\frac{3}{2} V(t) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial r} \right)_{r=a} \right] \text{sen}^2 \vartheta \right\} \text{sen} \vartheta d\vartheta.$$

(1) Vedi la mia Nota: *Sull'equazione della propagazione del calore in un filo*, Rend. Acc. Lincei, 5 maggio 1907.

Si osservi che è

$$2 \int_0^\pi (p)_{r=a} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = - \int_0^\pi \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_{r=a} \sin^2 \vartheta d\vartheta,$$

e che dalle (6) si ricava

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Omega \psi \right],$$

quindi, poichè risulta dalle (21), (22) che

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Omega \psi \right] \right\}_{r=a} = \sin^2 \vartheta \left\{ \frac{\nu}{a} \left(\frac{\partial f_2}{\partial r} \right)_{r=a} - \frac{3\nu V(t)}{2a} - \frac{a}{2} V'(t) \right\},$$

otteniamo

$$(24) \quad Z = 6\pi a k V(t) + \frac{2}{3} \pi a^3 \varrho V'(t) - 4\pi a k \left(\frac{\partial f_2}{\partial r} \right)_{r=a} - \\ - \pi a^2 \varrho \int_0^\pi \left(\frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right)_{r=a} \sin^2 \vartheta d\vartheta.$$

Resta ancora da calcolare $\left(\frac{\partial f_2}{\partial r} \right)_{r=a}$; poniamo per brevità

$$u_1 = (\nu t)^{-\frac{4}{3}} \left\{ e^{\frac{-(\beta-r)^2}{4\nu t}} - e^{\frac{-(\beta-2a+r)^2}{4\nu t}} \right\}, \quad u_2 = \nu^{-\frac{4}{3}} (t-\tau)^{-\frac{4}{3}} e^{\frac{-(r-a)^2}{4\nu(t-\tau)}};$$

allora la (23) si può scrivere

$$2\sqrt{\pi} f_2(r, t) = \int_a^\infty \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta} \right) u_1 d\beta - 3a\nu \int_0^t V(\tau) \frac{\partial u_2}{\partial r} d\tau,$$

e quindi

$$2\sqrt{\pi} \frac{\partial f_2}{\partial r} = \int_a^\infty \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta} \right) \frac{\partial u_1}{\partial r} d\beta - 3a\nu \int_0^t V(\tau) \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} d\tau.$$

Soddisfacendo u_2 all'equazione

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = 0$$

si ottiene

$$\nu \int_0^t V(\tau) \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} d\tau = - \int_0^t V(\tau) \frac{\partial u_2}{\partial \tau} d\tau = V(0) (u_2)_{\tau=0} + \int_0^t V'(\tau) u_2 d\tau,$$

essendo $(u_2)_{\tau=t} = 0$; quindi

$$2\sqrt{\pi} \left(\frac{\partial f_2}{\partial r} \right)_{r=a} = \int_a^\infty \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_{r=a} d\beta - 3aV(0) (u_2)_{\tau=0} - \\ - 3a \int_0^t V'(\tau) (u_2)_{r=a} d\tau.$$

Si osservi inoltre che

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a} = -2 \frac{\partial}{\partial \beta} (u_2)_{\substack{\tau=0 \\ r=\beta}},$$

perciò

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta}\right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a} d\beta &= 2 \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta}\right)_{\beta=a} (u_2)_{\substack{\tau=0 \\ r=a}} + \\ &+ 2 \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta}\right) (u_2)_{\substack{\tau=0 \\ r=\beta}} d\beta; \end{aligned}$$

e ricordando che per le (13) è

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta}\right)_{\beta=a} = \frac{3}{2} a V(0),$$

risulta

$$2V\pi \left(\frac{\partial f_2}{\partial r}\right)_{r=a} = 2 \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta}\right) (u_2)_{\substack{\tau=0 \\ r=\beta}} d\beta - 3a \int_0^t V'(\tau) (u_2)_{r=a} d\tau.$$

Abbiamo così finalmente per la resistenza

$$\begin{aligned} Z &= 6\pi a k V(t) + \frac{2}{3} \pi a^3 \varrho V'(t) + 6a^2 \sqrt{\pi k \varrho} \int_0^t \frac{V'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \\ (25) \quad &- \frac{4a \sqrt{\pi k \varrho}}{\sqrt{t}} \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\chi}{\beta}\right) e^{\frac{-(\beta-a)^2}{4\sqrt{t}}} d\beta - \pi a^2 \varrho \int_0^\pi \left(\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right)_{r=a} \sin^2 \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Per $V=0$ essa si riduce, quando il liquido sia inizialmente in quiete, all'ultimo termine, che rappresenta manifestamente la spinta idrostatica dovuta al campo di forza agente sul sistema.

Se il liquido non è soggetto a forze esterne, ove si supponga V costante e t abbastanza grande, perchè il moto sia divenuto sensibilmente stazionario, si è ricondotti alla nota formola di Stokes

$$Z = 6\pi a k V.$$

Conoscendo la resistenza che la sfera incontra nel suo movimento, è naturale il proporsi lo studio del moto della sfera nel liquido, supposto che la sfera ed il liquido siano soggetti alla gravità. Ma di ciò in una prossima Nota.

Meccanica. — *Interpretazione dell'equazione funzionale che regge la caduta di una sfera, in un liquido viscoso.* Nota del prof. G. PICCIATI, presentata dal Corrispondente T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Un'osservazione sugli involuppi dei sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota di C. ROSATI, presentata dal Socio E. BERTINI.

In una recente Nota ⁽¹⁾ il prof. Castelnuovo è riuscito a dare la proprietà caratteristica dei sistemi algebrici semplicemente infiniti di gruppi di punti equivalenti appartenenti ad una curva algebrica, facendo vedere che sopra una curva del genere π una serie ∞^1 irriducibile di gruppi di n punti, di indice ν , possiede un numero di punti doppi $\leq 2\nu[n + \pi - 1]$, il limite superiore essendo raggiunto quando e soltanto quando la serie è costituita da gruppi fra loro equivalenti.

Il detto teorema è stato dal sig. Torelli ⁽²⁾ generalizzato ai sistemi algebrici di gruppi di punti più volte infiniti, e da tale generalizzazione egli ha dedotto un criterio aritmetico per decidere quando un sistema algebrico di curve sopra una superficie algebrica sia contenuto in un sistema lineare.

Un'altra proprietà caratteristica dei sistemi algebrici di curve contenuti in un sistema lineare, e subito estendibile a varietà qualunque, si può pure dedurre con considerazioni semplicissime dal teorema di Castelnuovo, la quale proprietà, per quanto dedotta in modo quasi immediato, mi pare possa presentare un qualche interesse.

1. Si abbia sopra una superficie algebrica F un sistema algebrico irriducibile S di curve algebriche, e si indichi con ν il suo indice, (numero delle curve uscenti da un punto generico di F), e con π il suo genere, cioè il genere della curva φ i cui punti rappresentano le curve di S . Ad una curva generica di S corrisponde un punto di φ , ma può darsi che a qualche curva speciale di S corrisponda più di un punto di φ . Se ad una curva C di S corrispondono k punti di φ dei quali α_1 siano tra loro infinitamente vicini, α_2 pure infinitamente vicini, ecc. ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots = k$), la curva C sarà un elemento multiplo del sistema S , e i numeri $\alpha_1 - 1$, $\alpha_2 - 1$, ecc. (≥ 1) si diranno i suoi ranghi sulla superficie F . Chiameremo *involuppo*

⁽¹⁾ Cfr. Castelnuovo, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Atti della R. Accademia dei Lincei, 1906).

⁽²⁾ Cfr. la Nota di Torelli, *Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1907), nella quale trovasi il notevole risultato: *Sopra una superficie algebrica, della quale I indichi l'invariante di Zeuthen-Segre, un sistema algebrico irriducibile ∞^1 di curve di genere p prive di punti multipli variabili, che abbia il grado n , l'indice ν e σ punti base, possiede al più $\nu(n + \sigma + 4p + I)$ curve dotate di punto doppio. Se il limite è raggiunto, e solo in tal caso, il sistema è contenuto totalmente in un sistema lineare.*

del sistema S il luogo dei punti di F per cui due delle ν curve uscenti da esso coincidono in un medesimo elemento di S , cosicchè tale luogo sarà costituito dall'ordinario involuppo (luogo dei punti d'intersezione di due curve infinitamente vicine) e dagli elementi multipli del sistema S che hanno almeno uno dei ranghi maggiore di zero. Quando nel seguito parleremo dell'involuppo di S intenderemo senz'altro l'insieme dell'ordinario involuppo e di ciascun elemento multiplo del sistema stesso contato con un ordine di molteplicità uguale alla somma dei suoi ranghi.

Alle ν curve di S uscenti da un punto di F corrisponde un gruppo G di ν punti sulla curva φ ; variando il punto sulla superficie F , il gruppo G descrive su φ una serie $\infty^2 \Sigma$ birazionalmente identica alla superficie F o ad una involuzione ivi esistente, nel caso che il sistema non sia semplice. Si consideri ora su F una curva A che incontri la curva generica C del sistema S in m punti; ad un punto variabile su questa curva corrisponde un gruppo di Σ variabile in una serie $\infty^1 \gamma$ di indice m ; ad un punto di intersezione di A con l'involuppo di S corrisponde su φ un gruppo di γ contenente due punti infinitamente vicini. Ma per il teorema di Castelnuovo il numero dei punti doppi della serie γ è $\leq 2m[\nu + \pi - 1]$, il segno $=$ avendosi solo quando la serie γ è costituita da gruppi tutti equivalenti. Se dunque il numero dei punti d'intersezione di A con l'involuppo di S è $= 2m[\nu + \pi - 1]$, e la curva A appartiene ad un sistema continuo almeno ∞^1 di g.daro > 0 , variando A entro tale sistema, il numero dei punti d'intersezione di A coll'involuppo di S rimarrà costante, la serie γ che le corrisponde entro Σ descriverà tutta Σ e sarà sempre costituita da gruppi equivalenti, e poichè due serie γ hanno sempre almeno un gruppo comune, tutta la serie Σ sarà costituita da gruppi equivalenti. Allora per un teorema del prof. Severi ⁽¹⁾ il sistema S è contenuto totalmente in un sistema lineare.

Possiamo dunque enunciare:

« Dato sopra una superficie algebrica F un sistema algebrico irriducibile $\infty^1 S$ di curve algebriche, di indice ν e di genere π , una curva

(¹) Cfr. il n.° 2 della bella Memoria del Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, (Annali di Matematica, Serie III, tomo XII), nella quale, con l'uso degli integrali finiti di Picard relativi alla superficie, si danno le condizioni perchè un sistema algebrico di curve sia contenuto in un sistema lineare, e se ne deducono varie proprietà, fra le quali una dimostrazione veramente semplice del teorema (che è il risultato di recenti ricerche di Severi, Picard, Enriques, Castelnuovo, al quale se ne deve la determinazione ultima) che afferma essere il numero di detti integrali uguale all'irregolarità della superficie.

Il Severi stesso è ritornato sul teorema di Abel negli altri due lavori, *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche, e alla riduzione a forma normale degli integrali di Picard* (Rendiconti di Palermo, 1906), e *Osservazioni varie di Geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (Atti del R. Istituto veneto 1905-06).

A che incontri la curva generica del sistema in m punti, incontrerà il suo involuppo in un numero di punti $\leq 2m[\nu + \pi - 1]$: se il limite superiore è raggiunto e la curva A è atta a individuare un sistema continuo di grado ≥ 0 , il sistema S è contenuto totalmente in un sistema lineare ».

Prendendo per A una sezione piana (o iperpiana), si ottiene il teorema:

« L'ordine dell'involuppo di un sistema algebrico irriducibile (di ∞^1 indice ν e di genere π) di curve algebriche di ordine m non può superare il numero $2m[\nu + \pi - 1]$; se il limite superiore è raggiunto, il sistema algebrico è contenuto totalmente in un sistema lineare ».

Ricordando che le superficie regolari sono caratterizzate dal non possedere sistemi continui di curve algebriche non contenuti in sistemi lineari ⁽¹⁾, si ha:

« Una proprietà caratteristica delle superficie algebriche regolari è che in esse l'involuppo di ogni sistema algebrico irriducibile ∞^1 di indice ν , di genere π , di curve algebriche dell'ordine m ha l'ordine massimo $2m[\nu + \pi - 1]$ ».

2. L'estensione del teorema dimostrato al caso di una varietà qualunque si fa immediatamente. Entro una varietà V_n (ad n dimensioni) immersa nello spazio S_r si abbia un sistema algebrico irriducibile S semplicemente infinito di varietà V_{n-1} (ad $n-1$ dimensioni), di indice ν e di genere π , e sia I il suo involuppo, del quale intendiamo sempre faccia parte ogni elemento multiplo di S con una molteplicità uguale alla somma dei suoi ranghi. Sulla curva φ di genere π , immagine del sistema S , si avrà una serie algebrica $\Sigma \infty^n$ di gruppi di ν punti, birazionalmente identica alla varietà V , se il sistema S è semplice; se invece le ν varietà di S passanti per un punto hanno comuni ∞^k punti costituenti una varietà ω_k , la serie Σ sarà ∞^{n-k} e birazionalmente identica alla totalità delle ω_k . Un S_{r-n+1} generico di S_r taglierà la V_n in una curva C e la varietà generica del sistema S in m punti, se m è l'ordine di tale varietà. Alla curva C corrisponde su φ una serie ∞^1 di gruppi di ν punti contenuta in Σ e di indice m , la quale avrà un numero di punti doppi $\leq 2m[\nu + \pi - 1]$. Se il limite è raggiunto, variando l' S_{r-n+1} entro l' S_r e applicando il teorema di Severi, si ottiene:

« L'involuppo di un sistema semplicemente infinito irriducibile (di indice ν e di genere π) di varietà ad $n-1$ dimensioni e di ordine m contenuto entro una varietà ad n dimensioni ha l'ordine $\leq 2m[\nu + \pi - 1]$; se il limite superiore è raggiunto, e solo allora, il sistema è totalmente contenuto in un sistema lineare. Il limite sarà costantemente raggiunto per ogni sistema continuo, se la varietà è regolare ⁽²⁾ ».

⁽¹⁾ Cfr. Enriques, Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari (Atti della R. Accademia di Bologna, 1905).

⁽²⁾ Ricordiamo che si dice regolare una varietà ad n dimensioni priva di sistemi continui completi non lineari di varietà ad $n-1$ dimensioni.

3. Dalle considerazioni precedenti si può far discendere l'estensione a due varietà qualunque di un teorema che il Severi ha dimostrato per le corrispondenze a valenza zero fra una superficie e una curva, e fra una varietà e una curva ⁽¹⁾.

Fra i punti di due varietà V_r e V_s (ad r e ad s dimensioni) esista una corrispondenza algebrica che associ ad un punto generico di V_r una varietà V_{s-1} (ad $s-1$ dimensioni) entro la V_s ; se tale V_{s-1} nasce da ∞^i punti di V_r costituenti una varietà ω_i ($i \geq 0$), variando il detto punto entro la V_r , la V_{s-1} corrispondente descriverà entro V_s un sistema algebrico ∞^{r-i} ; che chiameremo S , birazionalmente identico alla varietà delle ω_i . Alle ∞^{r-i-1} V_{s-1} di S uscenti da un punto generico di V_s corrisponderanno entro V_r ∞^{r-i-1} ω_i le quali descriveranno una varietà V_{r-1} ; se le varietà di S uscenti da un punto hanno ∞^k punti comuni ($k \geq 0$) costituenti una varietà π_k , col variare del detto punto entro V_s la V_{r-1} descriverà entro V_r un sistema algebrico ∞^{s-k} , che diremo R , birazionalmente identico alla varietà delle π_k . Dimostriamo che *se uno dei due sistemi R od S è costituito da varietà tutte equivalenti, anche l'altro è totalmente contenuto in un sistema lineare*.

Ammetteremo dapprima $i=0$ $k=0$ e che le varietà ω_i e π_k si riducano ciascuna a un punto cioè che i sistemi R ed S siano semplici. Supposte tutte equivalenti le varietà di R , scegliamo entro S un sistema $\infty' \Gamma$ di indice ν e di genere π e una curva D che tagli la varietà generica di S (e quindi di Γ) in n punti. Alla curva D corrisponderà entro la V_r un sistema $\infty' \mathcal{A}$ contenuto in R e di indice n , e al sistema Γ una curva C del genere π che taglierà in ν punti la varietà generica di R . Le varietà del sistema \mathcal{A} segneranno sulla curva C gruppi di ν punti di una serie di indice n contenuta in una serie lineare, perchè le varietà di R sono equivalenti. Per il teorema di Castelnuovo questa serie avrà dunque $2n[\nu + \pi - 1]$ punti doppi; esistono cioè $2n[\nu + \pi - 1]$ varietà di \mathcal{A} che toccano la curva C . A queste varietà corrispondono entro la V_s i punti della curva D per cui passano due varietà di Γ infinitamente vicine, cioè i punti d'incontro di D con l'involuppo di Γ . Per il teorema del n.º precedente, il sistema Γ è contenuto totalmente in un sistema lineare, e perciò le varietà di S sono tutte equivalenti.

Applicando il criterio generale di Torelli (cfr. Torelli, l. c.) relativo ai sistemi algebrici di gruppi di punti più volte infiniti, si vede similmente che: « *Se si indicano con m_1, m_2, \dots, m_{r-1} gli ordini delle rispettive varietà $V_{r-2}, V_{r-3}, \dots, V_0$ intersezioni di 2, 3, ... r varietà generiche del sistema (supposto semplice), dimodochè sarà m_{r-1} il suo grado, ed ammesso che non esistano elementi multipli con ranghi maggiori dell'unità, gli ordini delle varietà $W_{r-2}, W_{r-3}, \dots, W_0$ luoghi dei punti per cui passano rispettivamente 3, 4, ..., $r+1$ varietà infinitamente vicine del sistema non possono superare rispettivamente i numeri $3m_1[\nu + 2\pi - 2], 4m_2[\nu + 3\pi - 3], \dots, (r+1)m_{r-1}[\nu + r\pi - r]$; quando uno di questi limiti è raggiunto, lo saranno anche gli altri, e il sistema sarà contenuto in un sistema lineare ».*

(1) Cfr. Severi, *Il teorema di Abel* ecc. (l. c.).

4. Prima di passare al caso generale, sarà utile dimostrare un lemma, sui sistemi algebrici composti. Si abbia entro una varietà V_r un sistema algebrico *irriducibile* ∞^s , che indicheremo con R , di varietà V_{r-1} , tale che le ∞^{s-1} varietà V_{r-1} uscenti da un punto generico di V_r abbiano comune tutta una varietà ω_i (riducibile o irriducibile) contenente quel punto, (per $i=0$ la ω_i si riduca a un certo numero di punti); io dico che *se le varietà di R sono equivalenti, il sistema lineare minimo definito da R è pure composto con le varietà ω_i .*

Indichiamo con $|R|$ il sistema lineare minimo ∞^t contenente R e riferiamo proiettivamente le varietà di $|R|$ ai punti di uno spazio lineare S_t . Alle varietà del sistema algebrico R corrisponderanno i punti di una V_s *irriducibile e appartenente* ad S_t ; alle ∞^{s-1} varietà di R uscenti da un punto P generico di V_r corrisponderanno i punti della V_{s-1} intersezione della V_s con un certo iperpiano π . Se le ∞^{t-1} varietà del sistema $|R|$ uscenti da P non contenessero tutta la ω_i , scegliamo un punto T della ω_i che non sia comune alle dette ∞^{t-1} varietà; ad esso corrisponderà in S_t un iperpiano τ *distinto* da π e contenente tutta la V_{s-1} intersezione di π con la V_s . Ne consegue che la V_{s-1} apparterrebbe al più ad un S_{t-2} e quindi la varietà *irriducibile* V_s apparterrebbe al più ad un S_{t-1} contro l'ipotesi che sia ∞^t il sistema lineare *minimo* cui appartiene il sistema algebrico R .

5. Ritorniamo ora al caso generale in cui i sistemi R ed S non siano semplici e, ricordando le notazioni del principio del n.° 3, indichiamo con V_{r-i}^* e con V_{s-h}^* le varietà, in corrispondenza razionale in un sol senso con le varietà date, immagini rispettive delle totalità delle ω_i e delle π_h , e con R^* ed S^* i sistemi algebrici semplici di varietà V_{r-i-1} e V_{s-h-1} trasformati di R e di S . Supposte equivalenti le varietà di R , al sistema lineare minimo contenente R , sistema composto con le ω_i , corrisponderà in V_{r-i}^* un sistema lineare contenente il sistema algebrico R^* ; ne consegue che S^* , e perciò anche S , è contenuto in un sistema lineare.

6. Supponendo che il sistema algebrico R , considerato come varietà ∞^{s-h} di elementi, sia una varietà regolare, la V_{s-h}^* , birazionalmente identica ad R , sarà regolare; ed allora il sistema S^* e perciò anche S e quindi R saranno contenuti totalmente in un sistema lineare. Possiamo dunque enunciare il seguente corollario:

“ *Entro una varietà qualunque ad r dimensioni, un sistema algebrico ∞^s di varietà ad $r-1$ dimensioni, il quale, considerando le sue varietà come elementi, sia una varietà regolare ad s dimensioni, è contenuto totalmente in un sistema lineare* (1) ”.

(1) Per $r=2$ $s=1$ si ha un noto teorema di Enriques. Cfr. Enriques, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (Rendiconti di Palermo, 1896).

Fisica matematica. — *Traiettorie e onde luminose in un mezzo isotropo qualunque.* Nota di ANTONIO GARBASSO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Un dispositivo per la produzione di correnti continue ad alta tensione, praticamente costanti.* Nota di O. M. CORBINO ⁽¹⁾, presentata dal Corrispondente D. MACALUSO.

1. In un lavoro precedente ⁽²⁾ ho mostrato che le correnti secondarie del rocchetto di Ruhmkorff funzionante con l'interruttore di Wehnelt sono, per l'interposizione di una scintilla anche di piccola lunghezza, nettamente unilaterali, nel senso delle correnti di apertura. Esse hanno un andamento rettilineo e si prolungano per una buona frazione del periodo dell'interruttore; solo con scintille cortissime le correnti divengono bilaterali.

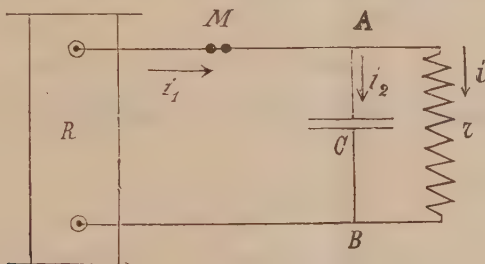


FIG. 1.

Tali correnti pulsanti di tensione altissima possono rendersi praticamente costanti col dispositivo della fig. 1.

Sia R un rocchetto di piccole dimensioni nel cui primario la corrente venga interrotta per mezzo dell'apparecchio di Wehnelt e si rileghi il secondario, come nella figura, col micrometro a scintille M con la resistenza non induttiva r e col condensatore C. A ogni scarica di apertura che traversa M, il condensatore riceverà una certa quantità di elettricità che circolerà in parte lungo la resistenza r nell'intervallo tra due scariche consecutive, mentre il resto si accumulerà nel condensatore. Le successive scariche tenderanno

⁽¹⁾ Istituto Fisico della R. Università di Messina.

⁽²⁾ O. M. Corbino, *Ricerche teoriche e sperimentali sul rocchetto di Ruhmkorff*, Cap. 3°. Atti A. E. I. fasc. 3°, 1907.

a elevare la differenza di potenziale tra A e B; ma si raggiungerà in brevissimo tempo un andamento di regime nel quale a ogni scarica viene apportata attraverso l'interruzione M tanta elettricità quanta ne circola lungo r nell'intervallo tra due scariche successive.

2. Per ottenere la legge di variazione col tempo della corrente i nella branca r , e l'entità delle sue massime variazioni, indichiamo con i_2 la corrente nella branca del condensatore e con i_1 la corrente che traversa lo spinterometro M e il secondario del rocchetto.

La corrente i_1 , per quanto si è detto, sarà rappresentata fino al suo annullamento da:

$$(1) \quad i_1 = A - Bt$$

nella quale A indica il valore quasi istantaneamente raggiunto alla rottura. Essa si annulla dopo il tempo:

$$(2) \quad \tau = \frac{A}{B}$$

e conserva il valore zero da quell'istante fino alla nuova rottura. Con scintille abbastanza corte e una induttanza supplementare nel primario abbastanza piccola si può ottenere ⁽¹⁾ che τ sia sensibilmente uguale all'intero periodo delle interruzioni: e allora la (1) resta valida in tutto il periodo.

Quanto a i_2 e i si ha:

$$(3) \quad i = i_1 - i_2 = \frac{v}{r}$$

ove v indica la differenza di potenziale agli estremi A e B del condensatore. Ma è:

$$v = V + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt$$

ove V rappresenta il valore della differenza di potenziale che si ha alla fine di ogni periodo in regime permanente, quindi:

$$ri = V + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt$$

cioè per la (3):

$$ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = V + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt$$

e per la (1):

$$ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = V + \frac{1}{C} \left(At - \frac{Bt^2}{2} \right)$$

Questa equazione è verificata, per qualunque valore di V, ponendo:

$$(4) \quad i = A - Bt + BCr + \left[\frac{V}{r} - (A + BCr) \right] e^{-\frac{1}{Cr}t}$$

⁽¹⁾ O. M. Corbino, loc. cit.

relazione che permette anche di determinare il valore di V in *regime permanente* quando si esprima che l'intensità, dopo il tempo τ definito dalla (2) ed uguale al periodo, riacquista il valore $\frac{V}{r}$ che possiede al tempo zero.

Converrà a questo scopo sviluppare in serie $e^{-\frac{1}{Cr}t}$, osservando che per elevati valori del prodotto Cr e per interruzioni molto frequenti, siccome è t minore del periodo, si può ritenere abbastanza piccolo $\frac{1}{Cr}t$, almeno quanto occorre per limitare lo sviluppo al termine di secondo grado in $\frac{1}{Cr}t$. Si ha allora:

$$e^{-\frac{1}{Cr}t} = 1 - \frac{1}{Cr}t + \frac{1}{2C^2r^2}t^2$$

ed è facile riconoscere che per:

$$C = 5 \text{ microfarad}$$

$$r = 20000 \text{ ohm}$$

$$t < \frac{1^s}{1000}$$

il termine di 3° grado nello sviluppo è inferiore a mezzo milionesimo.

Eseguendo la sostituzione nella (4) si ottiene:

$$(5) \quad i = \frac{V}{r} - Bt + \left(BCr + A - \frac{V}{r}\right) \left(\frac{1}{Cr}t - \frac{1}{2C^2r^2}t^2\right)$$

Se si vuole che per:

$$t = \tau = \frac{A}{B}$$

sia

$$i = i_0 = \frac{V}{r}$$

dev'essere quindi, entro il 2° ordine,

$$(6) \quad A = \frac{2V}{r} \left(1 + \frac{\tau}{2Cr}\right)$$

che definisce il potenziale di regime V .

Esprimendo tutto in funzione di V , cioè sostituendo nella (5) ad A il valore dato dalla (6) e a B il valore corrispondente:

$$B = \frac{A}{\tau} = \frac{2V}{r\tau} \left(1 + \frac{\tau}{2Cr}\right)$$

e conservando solo i termini di secondo grado in $\frac{1}{Cr}t$ o in $\frac{1}{Cr}\tau$, si avrà infine:

$$(7) \quad i = \frac{V}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{Cr} t \left[1 + \frac{\tau}{Cr} - \frac{t}{\tau} - \frac{1}{Cr} t \right] \right\}$$

Da questa possiamo ottenere $\frac{di}{dt}$:

$$\frac{di}{dt} = \frac{V}{r} \left\{ \frac{1}{Cr} + \frac{\tau}{C^2 r^2} - \left(1 + \frac{Cr}{\tau} \right) \frac{2}{C^2 r^2} t \right\}$$

e questa relazione ci dice che $\frac{di}{dt}$ è una funzione lineare decrescente del tempo, che assume il valore zero per:

$$t = \frac{\tau}{2}$$

Adunque la i risulta di una parte costante, $\frac{V}{r}$, e di una parte crescente con legge parabolica, che raggiunge un massimo a metà del periodo, dopo del quale torna a decrescere e riacquista il valore zero alla fine del periodo.

Il valore massimo, raggiunto a metà del periodo è dato da:

$$i_{\frac{\tau}{2}} = \frac{V}{r} \left[1 + \frac{1}{4Cr} \tau \left(1 + \frac{\tau}{Cr} \right) \right]$$

cioè l'ampiezza totale della parte variabile, riferita al valore minimo di i eguale a $\frac{V}{r}$, è data sensibilmente da $\frac{\tau}{4Cr}$. Così se fosse:

$$C = 5 \text{ microfarad}$$

$$r = 20000 \text{ ohm}$$

$$t < \frac{1^s}{1000}$$

la variazione totale *relativa* di i sarebbe solo di 1 su 2000, cosichè si può riguardare i come praticamente costante.

3. Se il rifornimento di carica al condensatore C si compisse, anzichè lungo tutto il periodo, durante una frazione di esso, la variazione relativa di i sarebbe alquanto maggiore. Però anche nel caso limite che il rifornimento abbia luogo in una frazione infinitesima del periodo, la variazione stessa non può oltrepassare il valore $\frac{\tau}{Cr}$, come è facile riconoscere ricordando

la legge che regola la scarica aperiodica di un condensatore, e l'ipotesi fatta sull'ordine di grandezza di $\frac{\tau}{Cr}$.

La tensione quasi costante V esistente agli estremi del condensatore può, per un determinato valore di A , elevarsi quanto si vuole con l'accrescere r , come risulta dalla (6); essa vien solo limitata dalla resistenza del condensatore al perforamento.

4. Per la realizzazione pratica del dispositivo sopra discusso ho trovato particolarmente adatti i piccoli rocchetti di Ruhmkorff, capaci di produrre scintille di pochi centimetri. Essi posson funzionare molto bene con l'interruttore di Wehnelt, avendo cura di aggiungere una piccola autoinduzione supplementare nel primario e di ricorrere a un anodo di platino di piccola superficie, in modo che la corrente media primaria non riesca eccessiva. Per evitare che l'interruttore si incanti è utile in principio introdurre nel primario una notevole autoinduzione, che può essere esclusa quando l'interruttore ha cominciato a funzionare.

Si ottengono così facilmente circa 2000 interruzioni per secondo; e il funzionamento può durare a lungo raffreddando coi noti metodi il liquido elettrolitico. La corrente che traversa la branca r è abbastanza elevata e varia poco con r ; cosicchè aumentando r si possono raggiungere tensioni veramente molto alte, nei limiti di sicurezza del condensatore. Un piccolo tubo a gas rarefatto, con gli elettrodi disposti a distanza opportuna, può far da valvola; esso infatti, derivato in permanenza ai poli del condensatore, si lascia attraversare dalla scarica quando la tensione superi un limite assegnato. Quanto allo spinterometro M l'esperienza suggerisce la più opportuna distanza degli elettrodi; per distanze troppo piccole passano anche le correnti di chiusura e il condensatore si carica poco — per distanze troppo grandi la quantità di elettricità messa in moto a ogni scarica diviene piccola; e inoltre le irregolarità del fiocco di scintille dovute alle intense correnti di aria calda da esso destate, rendono l'andamento incostante. È utile quindi oltrepassare solo di poco la distanza per cui passano anche le correnti di chiusura.

5. Nelle prove da me fatte, non disponendo di un condensatore capace di resistere a tensioni elevate, mi son dovuto limitare alla tensione di 1200 volt, e anzi fu necessario, per non compromettere il condensatore in carta paraffinata che possiede questo Istituto, associare ad esso, in serie, un complesso di quattro condensatori ad alluminio, anch'essi in serie, e formati inizialmente a 150 volt. Siccome questi ultimi avevano una resistenza interna non infinita e quindi tutta la differenza di potenziale si sarebbe riportata agli estremi del primo, per distribuirlo egualmente si derivò su questo una resistenza ρ di circa 20000 ohm; cosicchè nel regime permanente si aveano 600 volt agli estremi del condensatore in carta e 600 agli estremi

del sistema di condensatori elettrolitici; le capacità dei due condensatori erano pure eguali.

Il rocchetto R era capace di dare scintille di qualche millimetro. Il suo primario era rilegato a una a. i. supplementare, di cui una parte veniva esclusa a funzionamento iniziato, a una batteria di accumulatori (76 volt) e all'interruttore di Wehnelt, costituito da un filo di platino di mm. 0,65 di diametro e mm. 6 di lunghezza, saldato a un tubo di vetro e immerso in acqua acidulata con acido solforico (densità 1,15). Le palline dello spinterometro erano a circa due millimetri di distanza; con che il fiocco di scintille presentava una regolarità e una fissità rimarchevoli. Agli estremi A, B si ottennero così 1200 volt, con una corrente utile, traversante la resistenza ρ e i condensatori in Alluminio, di circa 25 milliampere.

Col solo condensatore in carta paraffinata, e una resistenza r (fig. 1) tale che agli estremi A B non si oltrepassassero 600 volt, la branca r era traversata da una corrente costante di circa 30 milliampere; essa variava ben poco con r (così accrescendo r da zero fino a 20000 ohm la corrente decresceva da 35 a 30 milliampere soltanto).

D'altra parte è chiaro che disponendo di condensatori per alta tensione e di rocchetti che forniscano correnti secondarie di intensità media più elevata si devono ottenere risultati ben più cospicui. Così con due condensatori Ruhmer in serie si potrebbero raggiungere, elevando convenientemente la resistenza r del ramo di utilizzazione, circa 6000 volt (¹). Nè il valore più piccolo che avrebbe in tal caso la capacità C può render più elevate le rapide oscillazioni della corrente i , poichè tali variazioni, come è dimostrato dalla (8) dipendono solo dal prodotto Cr . Cosicchè il dispositivo potrebbe sostituire le batterie di piccoli accumulatori nei casi in cui questi non son posseduti in numero sufficiente.

Fisica. — *La quantità d'elettricità cui dà passaggio la scintilla e la sua cosiddetta resistenza.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Corrispondente D. MACALUSO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(¹) Con un rocchetto da 15 cm. si ottengono al secondario quasi costantemente 15 milliampere, comunque sia elevata la resistenza r .

Chimica. — *Su un nuovo derivato del perossido di molibdeno.* Nota di ARRIGO MAZZUCCHELLI, presentata dal Socio PATERNO⁽¹⁾.

In relazione a studî già intrapresi⁽²⁾ sui derivati salini del perossido di uranio, i cui risultati finora ottenuti saranno resi noti fra breve, ho voluto esaminare se composti di un genere simile possono ottenersi anche con gli omologhi dell'uranio, il molibdeno cioè e il tungsteno. La presente nota preliminare ha per scopo di render conto di quanto ho potuto già osservare in proposito.

Per un primo tentativo, come questo, di ottenere derivati complessi del triossido di molibdeno, le maggiori probabilità di successo sono presentate senza dubbio dai composti di addizione che il triossido di molibdeno forma cogli acidi organici bivalenti, composti che oltre a corrispondere ad una formula assai semplice (ciò che facilita assai la interpretazione dei risultati analitici) posseggono pure un grado di *complessità*, nel senso fisico-chimico, assai spinto, come risulta, fra altro, dagli interessanti studî di Grossmann e Kramers⁽³⁾. Fra i varî sali poi (ossalati, citrati, malati, tartrati) sembrano preferibili gli ossalati, che, per non presentare ossidrili alcoolici nella molecola, meno facilmente possono sottostare a una azione ossidante demolitrice da parte dell'acqua ossigenata. Sperimentando col molibdoossalato ammonico $\text{MoO}_3 \cdot \text{C}_2\text{O}_4 \cdot (\text{NH}_4)_2$, che può facilmente ottenersi sciogliendo in una soluzione concentrata e calda di ossalato ammonico la quantità calcolata di acido molibdico giallo, $\text{MoO}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, ho trovato infatti che per aggiunta di Perhydrol Merk, nelle proporzioni di una molecola per una molecola di sale complesso, la soluzione assume un bel colore giallo oro, e tutto il sale primitivamente esistente si trova quantitativamente trasformato in un nuovo composto, come risulta, fra altro, dal fatto che la soluzione gialla non precipita neppure per aggiunta di 4 a 5 volumi di alcool a 95°, mentre dalle soluzioni del molibdoossalato ammonico può farsi deporre questo allo stato cristallino già per aggiunta di mezzo volume di alcool, e che il cloruro di bario, che dà un precipitato cristallino pesante col molibdoossalato inalterato, non precipita affatto colla soluzione gialla; anzi, l'aggiunta di H_2O_2 vale a ridisciogliere il precipitato di molibdoossalato baritico già formato.

Quest'ultima osservazione ha fornito un modo facile di preparare il sale di bario del nuovo sale complesso che si forma così per azione dell' H_2O_2

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Università di Roma.

(²) V. questi Rendiconti, 1906, vol. XV, 2° sem., pag. 429.

(³) Zeit. anorg. Ch, 41, 1904 (43-60).

sui molibdosalati. Una soluzione di molibdosalato ammonico è stata precipitata a freddo con un eccesso di cloruro di bario, il precipitato cristallino sabbioso così ottenuto è stato lavato a fondo su filtro alla pompa, poi impastato con poca acqua in un mortaio e infine trattato con un piccolo eccesso di Perhydrol. In capo a due o tre minuti si ha dissoluzione completa del sale in un liquido giallo oro; per aggiunta di 1-2 volumi di alcool a 95° si può facilmente precipitare la maggior parte del sale disciolto sotto forma di fiocchi abbastanza leggeri, color giallo-crema, ma neppure con un forte eccesso dello stesso alcool si può ottenere la deposizione completa del sale, che è evidentemente un po' solubile nell'alcool acquoso. I fiocchi depostisi per la prima aggiunta di alcool furono raccolti su filtro, lavati accuratamente due o tre volte con alcool, questo spostato con etere anidro, e infine dopo una compressione sommaria tra carta la massa polverulenta, soffice, fu lasciata in essiccatore ad acido solforico per 12 ore, e poi analizzata. Essa contiene bario, molibdeno, ossigeno attivo (riconosciuto con KI in soluzione acida) acido ossalico (riconosciuto dall'esame del precipitato che si ha con CaCl_2 in soluzione ammoniacale) e acqua (scaldando in provetta asciutta). Nell'acqua si scioglie solo parzialmente a freddo, colorandola in giallo chiaro, e non molto più a caldo; è solubile facilmente negli acidi. Questa singolarità della quasi completa insolubilità nell'acqua di una sostanza essiccata che appena formata (e anche, come mi accertai, appena precipitata dall'alcool) vi è invece facilmente solubile, non può dirsi nuova pei derivati del perossido di molibdeno; ricorderò che secondo Muthmann e Nagel (¹), l'acido ozomolibdico stesso, una volta separatosi allo stato solido, si scioglie solo scarsamente nell'acqua, mentre può ottenersi sciogliendo l'acido molibdico nell' H_2O_2 , allo stesso modo come il persale di cui qui si tratta si ha sciogliendo nell'acqua il molibdosalato di bario, quasi insolubile. I persali sono in generale più solubili dei sali normali, ma sottostanno facilmente a processi di *invecchiamento*, per usare un termine ormai consacrato.

Sottoposto a un graduale riscaldamento, questo preparato si decompone con leggera esplosione, dovuta a una specie di combustione interna. Come infatti risulterà dalle analisi, esso contiene anidride ossalica e ossigeno attivo in proporzioni equivalenti, $\text{C}_2\text{O}_3 : \text{O}$.

Tranne l'acqua, che per ora è stata calcolata solo per differenza, tutti gli altri componenti di questo sale sono stati determinati direttamente. Il bario si è ottenuto precipitando all'ebollizione per aggiunta graduale di acido solforico diluito la soluzione del sale in acido cloridrico; dalle acque madri, concentrandole in crogiolo di platino e scaldando il residuo in bagno d'aria al disotto del rosso sino a costanza di peso, si ottenne il triossido di molibdeno. L'ossigeno attivo è stato determinato digerendo a 60° per 15 minuti

(¹) Ber. 31, 1898 (1838).

la sostanza con soluzione di KI (da cui comincia a liberarsi lo jodio già a freddo) sia in ambiente inizialmente neutro, sia con aggiunta di acido acetico; lo jodio liberato fu titolato con soluzione $\frac{N}{5}$ di iposolfito sodico senza uso di salda di amido (che, trattandosi di un liquido perfettamente incolore, e relativamente concentrato, è affatto superflua). Il liquido proveniente dalla titolazione fu acidulato con HCl, e, dopo precipitazione all'ebollizione il bario con acido solforico (ciò che fornì un controllo al valore precedentemente ottenuto) fu reso alcalino con NH_3 e precipitato all'ebollizione con $CaCl_2$; il precipitato, che constava di ossalato, molibdato e possibilmente carbonato di calcio, fu lavato sino a completa eliminazione di joduri e poi sciolto in acido solforico diluito e titolato al permanganato, ottenendosi così l'acido ossalico. Tanto per controllo, si determinò pure il residuo fisso alla calcinazione: fu inevitabile una piccola perdita durante il primo riscaldamento, ma poichè i valori ottenuti sono inferiori ai calcolati, essi valgono a confermare, indirettamente, il risultato delle altre analisi.

Ecco i dati numerici ottenuti:

- Gr. 0.7018 diedero 0,3806 $BaSO_4$, corrispondenti a 31,92 % Ba, e 0,2318 MoO_3 , cioè 33,03 %.
- Gr. 0,5599 consumarono 12,22 cc. iposolfito 0,2 N, diedero 0,3040 $BaSO_4$ e consumarono 25,68 permanganato 0,1 N; ciò che corrisponde a 3,49 % O ⁽¹⁾, 31,96 % Ba, e 20,18 % C_2O_4 .
- Gr. 0.6234 digeriti con KI in soluzione acetica consumarono 15,18 cc. iposolfito, diedero 0,3395 $BaSO_4$, e consumarono 28,49 cc. $KMnO_4$: ciò che dà 3,90 % O, 32,05 % Ba, 20,10 % C_2O_4 .
- Gr. 0,6621 lasciarono alla calcinazione 0,4478, cioè 67,63 %.
- Gr. 0,3151 lasciarono 0,2097, cioè 66,55 %.

Questi risultati sono posti a confronto coi valori calcolati nella seguente tabella:

Calcolato		Trovato				
		I	II	III	IV	V
Ba	31,93	31,92	31,96	32,05	—	—
MoO_3	33,46	33,03	—	—	—	—
O	3,72	—	3,49	3,90	—	—
C_2O_4	20,45	—	20,18	20,10	—	—
$BaMoO_4$	69,11	—	—	—	67,63	66,55

I valori calcolati sono stati dedotti dalla formula



(¹) Fu digerito con KI neutro, e la soluzione, scolorata con iposolfito, si tinse subito in giallastro per aggiunta di HCl, ciò che fa supporre vi fosse ancora una piccola quantità di perossido non decomposto.

Si vede dunque come in questo caso tutto il triossido di molibdeno si è convertito in perossido, pur restando unito come anione complesso col residuo ossalico.

L'accertamento della esistenza di un composto di questo genere è di importanza fondamentale per la questione dei perossisali del molibdeno. Esso ci mostra come, oltre i fluoperossisali preparati dal Piccini, oltre i perossimolibdati del Péchard e di Muthmann e Nagel, può esistere una quantità di composti complessi del molibdeno contenenti ossigeno attivo nella loro molecola, il cui studio potrà portare a interessanti conclusioni sulla funzione chimica e sul carattere del Mo O_4 , e forse anche sulla costituzione di gruppi complessi, come quelli che il triossido di molibdeno dà coll'acido fosforico, intorno a cui da tanto tempo i chimici indagano.

A studi analoghi si presteranno i derivati analoghi del tungsteno, per il quale ho già accertato qualitativamente la formazione di composti perossidati per azione dell'acqua ossigenata sui tungstoossalati.

Mi riservo di render note esperienze ulteriori sui sopraccennati argomenti.

Cristallografia. — *Apofillite di Traversella*. Nota di LUIGI COLOMBA ⁽¹⁾, presentata dal Socio G. SPEZIA.

Nell'estate scorsa in seguito ad alcuni lavori di sgombero compiuti nella galleria Mongenet a Traversella, vennero, dove essa incontra alcune lenti di calcare cristallino corrose e franate, messe allo scoperto nel detto calcare alcune geodi tappezzate da cristalli di apofillite e di calcite.

Riserbandomi di descrivere prossimamente i cristalli di calcite, mi occuperò nella presente Nota dell'apofillite, minerale interessante perchè è una specie nuova per i giacimenti di Traversella, essendo le uniche specie appartenenti al gruppo delle zeoliti, considerato nel suo significato più esteso, rappresentate dalla cabasite e dalla stilbite osservate da G. Struever ⁽²⁾ su alcuni esemplari di Monteacuto.

L'apofillite è in nitidi cristalli, facilmente sfaldabili secondo 001 e la cui altezza giunge raramente ai 3 o 4 millimetri; quelli più piccoli sono limpidi ed incolori mentre quelli di dimensioni maggiori hanno un aspetto lattiginoso; questi cristalli sono impiantati sulla calcite che tappezza le suddette geodi. In essi sono sempre presenti le (001), (100), (111) alle quali molto raramente si aggiungono le 310 e 210 e più raramente ancora un diottaedro corrispondente al simbolo $1\ 1\ 55$ nuovo, per quanto mi consta nell'apofillite.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto mineralogico della R. Università di Torino.

⁽²⁾ *Studi sulla Mineralogia italiana*. Memoria della R. Accad. delle Scienze di Torino, serie II, vol. XXVII (estratto) pag. 43-44.

Le misure ottenute per la 111 sono molto oscillanti, fatto questo comune nell'apofillite; dall'esame di una serie di 10 cristalli ebbi invero i seguenti quattro gruppi principali di valori per l'angolo 111. $\bar{1}11$:

	Valori estremi	Valori medi	Spigoli misurati
1° gruppo (un cristallo) . .	74° 8'-74°12'	74°10'	2
2° " (due cristalli) . .	74°26'-74°30'	74°28'	2
3° " (cinque cristalli)	75°25'-75°29'	75°28'	10
4° " (due cristalli) . .	75°37'-75°40'	75°39'	3

Assumendo come fondamentale l'angolo medio corrispondente al terzo gruppo, perchè più frequente, si ottiene:

$$111.001 = 59^{\circ}55' \quad c = 1,2210$$

valori molto prossimi a quelli ottenuti da Dauber ⁽¹⁾ per l'apofillite di Poonah.

In tal caso i valori corrispondenti agli altri gruppi di angoli porterebbero a forme vicinali della 111, appartenenti al tipo di quelle osservate dapprima da Ploner ⁽²⁾ nell'apofillite di Val di Fassa; e questo specialmente per quelli del 1° e 2° gruppo essendo quelli del 4° gruppo troppo vicini a quelli del 3° per poterli considerare a parte.

Per lo stesso motivo riunendo insieme quelli dei due primi gruppi si otterrebbe per l'angolo con 001 un valore medio poco lontano da quello richiesto per la 17 17 18:

	Valori estremi dei due gruppi	Valore medio	Valore teorico ($c = 1,2210$)
17 17 18.001	58°30'30"-58°50'	58°40'15"	58°29'

Io credo però che sia preferibile considerare questi valori come corrispondenti a facce vicinali della 111, derivanti probabilmente da piccole variazioni avvenute nella giacitura delle facce della detta forma durante l'accrescimento dei cristalli; invero io osservai come i valori inferiori siano proprii dei cristalli più grossi, mentre nei più piccoli invece i valori tendono verso quelli da me assunti come fondamentali.

Osservai la 310 in due soli cristalli in uno dei quali (fig. 1) era pure presente la 210 da me determinata però solamente mediante misure approssimate; ottenni per queste forme i seguenti valori angolari:

	Valori estremi	Valori medi	Valori teorici
310.100	18°27'-18°33	18°30'	18°26'
210.100	26°-27°	26°30'	26°34'

⁽¹⁾ *Ueber Apophyllit-Krystalle*. Pogg. Ann. (1859) CVII, pag. 281.

⁽²⁾ *Ueber die Krystallformen der Apophyllits der Seiseralpe*. Zeit. für Kryst. Miner. XVII (1891) pag. 337.

Il diottaedro 1155 fu osservato in un solo cristallo sotto forma di facce striate giacenti nelle zone 111.100; da una di queste facce potei ottenere la seguente misura angolare:

	Valore trovato	Valore teorico ($c = 1,2210$)
1155 100	30°21'	30°26'

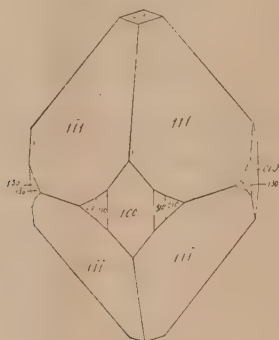


FIG. 1.

Questo diottaedro è intermedio fra la 211 osservata da Descloizeaux⁽¹⁾ e la 1255 osservata da Ploner⁽²⁾, forme che rispettivamente portano, assumendo $c = 1,2515$ secondo Dana⁽³⁾, ai seguenti valori angolari:

$$211.100 = 32^{\circ}37' \qquad 1255.100 = 28^{\circ}4'$$

mentre per la 1155 si ha, assumendo la predetta costante:

$$1155.100 = 30^{\circ}12'$$

valore sufficientemente distinto da quelli corrispondenti alle predette forme.

Otticamente considerata l'apofillite di Traversella presenta caratteri analoghi a quelli comunemente osservati in detta specie minerale. Osservando delle lamine di sfaldatura e quindi normali all'asse principale, a nicols incrociati e colla lamina di gesso, si nota come esse appariscano divise in quattro settori alternativamente colorati in giallo ed in azzurro, passando le linee di divisione dei settori per i vertici delle sezioni quadrate delle lamine stesse, fatto questo già osservato da Klein⁽⁴⁾ in molte apofilliti.

A luce convergente le stesse lamine lasciano vedere una croce nera molto fissa contornata da una zona bianca che sostituisce gli anelli colorati; il che indica come l'apofillite di Traversella debba riferirsi al tipo leuco-

(1) *Man. de Minéral.* Paris (1862) Vol. I, pag. 125.

(2) *Loc. cit.*

(3) *System of Mineralogy* (1892) pag. 566.

(4) *Mineralogische Mittheilungen.* Neues Jahrb. fur Min. Geol. und Pal. 1892, II, pag. 165.

ciclitico di Herschell (1). Osservando questa figura d'interferenza con la lamina di gesso si nota che i quattro settori in cui il campo apparisce diviso dalla croce nera mantengono il carattere delle alterne colorazioni gialle ed azzurre.

Cornu (2) ha stabilito che il tipo leucociclitico dell'apofillite sia proprio di quelle varietà riferibili, perchè prive di fluoro, all'*idroapofillite*, la quale è otticamente positiva, mentre invece il tipo cromociclitico di Herschell si osserverebbe nelle varietà fluorifere e riferibili alla *fluorapofillite* otticamente negativa. Applicando tali principî all'apofillite di Traversella ne risulterebbe che essa dovrebbe essere priva di fluoro il che invece non avviene; questa apparente contraddizione si spiega però facilmente ammettendo con Klein che l'apofillite naturale sia una mescolanza di leucociclite e di cromociclite. Ora essendo le proporzioni di fluoro sempre molto esigue nell'apofillite naturale ne risulta che la quantità di fluorapofillite che in essa è associata alla idroapofillite è sempre piccolissima, per cui difficilmente può influire sui caratteri ottici del minerale in questione, osservandosi solamente che, al pari di quanto io ho constatato anche nell'apofillite di Traversella, nelle lamine sottili si hanno talvolta delle plaghe molto limitate che hanno comportamento ottico inverso.

La mancanza di una sufficiente trasparenza nei cristalli più grossi mi ha impedito di aver lamine che mi permettessero di determinare l'indice straordinario; invece la facile sfaldabilità parallelamente a 001 mi ha permesso di ottenere anche dai cristalli più piccoli delle nitide lamine trasparentissime normali all'asse principale, dalle quali, adoperando il metodo del Duca di Chaulnes, ottenni per l'apofillite di Traversella il seguente valore medio per l'indice di rifrazione ordinario:

1,533.

Un'analisi quantitativa mi diede i seguenti risultati:

Si O₂ = 53,03

Ca O = 26,06

K₂ O = 4,29

H₂O, Fl = 16,72

100,10.

In un altro saggio ottenni per gli elementi volatili un valore di 16,68 %.

La presenza dell'acido fluoridrico fu dimostrata dallo svolgimento di vapori acidi, che incominciò in ambedue i casi ad una temperatura di circa

(1) *On a remarkable Peculiarity* ecc. Trans. of the Cambridge Philos. Soc. (1822) I pag. 241.

(2) *Vorläuf Mitth. über Untersuch. an den Mineralien der Apophyllitgruppe* ecc. Centralbl. für Miner. Geol. ecc. 1906, 3, pag. 79.

400°, per il che avendo ottenuto rispettivamente nei detti saggi a quest'ultima temperatura delle perdite pari a 16,05 ed a 16,20 % ebbi per il fluoro quantità varianti fra 0,67 e 0,48 %. Questi valori sono però solo approssimativi; invero in una determinazione diretta ebbi per il fluoro una quantità pari a 0,87 % il che indica come a 400° piccole tracce di fluoro si fossero già eliminate.

Assumendo tale proporzione per il fluoro si ottiene per la apofillite di Traversella la seguente composizione centesimale

Si O ₂	53,03	19	1,72
Ca O	26,06	10	} 1
K ₂ O	4,29	1	
H ₂ O	15,85	19	} 1,82 .
Fl	0,87	1	
	<hr/>		
	100,10		

Volendo ricavare la formola di struttura corrispondente a questi risultati occorre considerare dapprima le questioni concernenti la posizione che debbono assumere il fluoro e l'acqua, essendovi sensibili divergenze fra i vari autori.

Per quanto si riferisce al fluoro, Rammelsberg ⁽¹⁾ ammise che fosse unito al potassio nel composto KFl, molecularmente associato al silicato calcico proprio dell'apofillite; invece gli autori moderni ammettono piuttosto che esso entri a sostituire parzialmente gli ossidrilici o l'ossigeno nell'acido metasilicico.

L'ipotesi di Rammelsberg apparisce poco probabile per la nessuna analogia chimica esistente fra i due composti che dovrebbero essere associati in miscela isomorfa nell'apofillite; inoltre essa è pure contraddetta dalla mancanza di relazioni fra i rapporti in cui il potassio ed il fluoro entrano nella molecola dell'apofillite. Invero se si considerano le analisi riportate da Dana ⁽²⁾, si osserva come l'apofillite di French Creek e quella della Valle di Fassa, che sono rispettivamente da considerarsi come la più ricca e la più povera in potassio, o non contengono affatto oppure solo contengono tracce di fluoro, mentre invece quella di Berghen Hill ne contiene una quantità superiore a quella necessaria per saturare tutto il potassio, per cui si richiederebbe nella molecola, oltre alla presenza del fluoruro di potassio, anche quella del fluoruro di calcio.

In ultimo non si spiegherebbe perchè questi fluoruri ad una temperatura di 400° si decompongano, invece di volatilizzare inalterati.

⁽¹⁾ *Hand. der Mineralchemie* (1875) 1^a parte, pag. 606.

⁽²⁾ *System of Mineralogy* (1892) pag. 568.

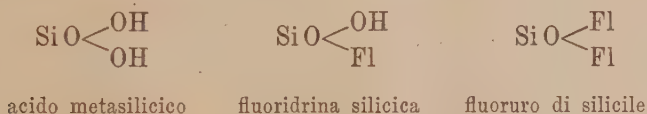
La diretta unione del fluoro col silicio si può interpretare in due modi. Il primo sarebbe quello di ammettere la presenza di idrofluosilicati nella molecola dell'apofillite, potendosi a questo proposito invocare le analogie stabilite da Remsen (1) fra gli idrofluosilicati ed i metasilicati, per cui essendo il gruppo Fl_2 equivalente ad un atomo di ossigeno, sarebbero equivalenti i composti K_2SiFl_6 e K_2SiO_3 .

Tuttavia anche per questa ipotesi persiste il fatto che, pur ammettendo la dissociazione dell'idrofluosilicato potassico per azione del calore non si avrebbe modo di ottenere acido fluoridrico libero, quando tutta l'acqua esistente nell'apofillite fosse già eliminata, come appunto avviene a 400° , poichè la detta dissociazione non potrebbe avvenire che mediante la seguente reazione:

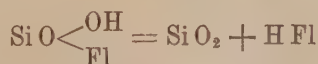


Migliore è l'ipotesi secondo la quale il fluoro entrerebbe a sostituire parzialmente o totalmente gli ossidrili nella molecola dell'acido metasilicico, bastando a tale scopo di ammettere che esso, al pari del cloro, possa dar luogo a fluoruri dei radicali acidi od a fluoridrine derivanti dalla totale o parziale costituzione degli ossidrili negli acidi mediante atomi di fluoro.

Ammessa la esistenza di tali composti si avrebbero nel caso dell'acido metasilicico i seguenti successivi tipi di composti:



fra i quali il secondo potrebbe, mediante la seguente reazione:



dar luogo, per semplice dissociazione, ad acido fluoridrico ed a separazione di silice.

Nell'apofillite di Traversella essendovi un atomo di fluoro si avrebbe una molecola di fluoridrina.

Per quanto riguarda l'acqua, come ho detto, essa è nei due saggi da me compiuti, rispettivamente pari a 15,85 ed a 15,81, quando si escluda la quantità 0,87 di fluoro dal complesso degli elementi volatili. Nel seguente quadro sono riportate le successive perdite che si hanno a temperature crescenti fra 100° e 400° .

(1) *Am. Chem. News.* **XI**, pag. 291.

Temperature	1° saggio	2° saggio	Temperature	1° saggio	2° saggio
100°	0,17 %	—	280°	—	9,29 %
160°	0,51 "	—	285°	9,89 %	—
200°	0,86 "	—	300°	—	10,70 "
205°	—	1,15 %	325°	11,60 "	—
240°	—	5,35 "	350°	—	12,70 "
250°	6,51 "	—	360°	13,35 "	—
270°	8,49 "	—	400°	15,85 "	15,81 "

Costruendo per punti la curva corrispondente a questi valori come è indicato nella figura 2^a dalla linea OA si nota come essa dopo un aumento

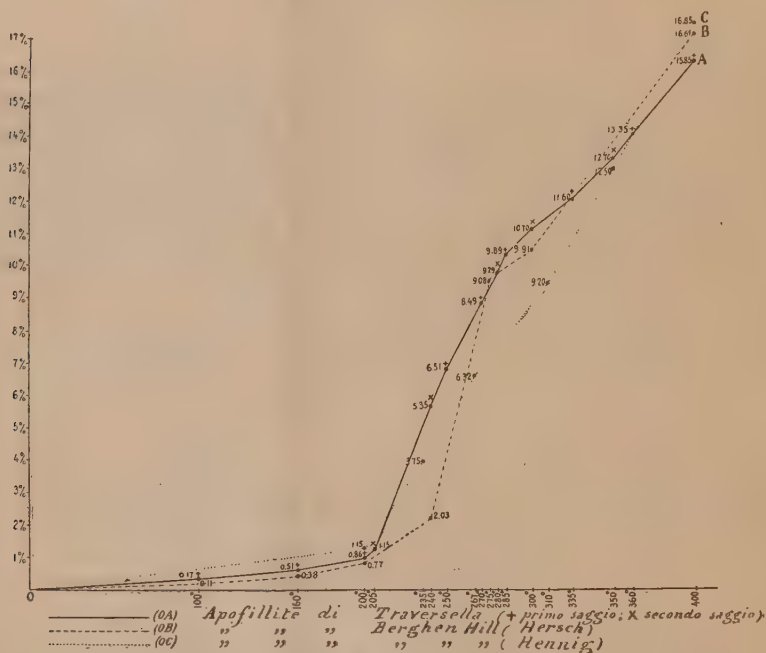


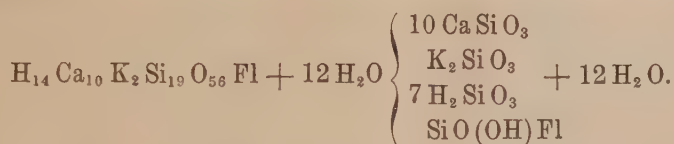
FIG. 2.

graduale e lentissimo nel tratto compreso fra 100° e 200° subisca una forte deviazione nel tratto compreso fra 200° e 285°, deviazione che si mitiga assai al di là di quest'ultima temperatura; e se si riferiscono queste perdite parziali alla quantità totale di acqua contenuta nell'apofillite di Traversella, pari a 19 molecole, si ottengono i seguenti rapporti:

100°	200°	perdita = 0,80 %	pari a 1,03 molecole di acqua
200°	285°	" = 9,03 "	" 10,82 "
285°	400°	" = 5,90 "	" 7,14 "

Ora se si considera che delle 19 molecole di silice presenti nella molecola dell'apofillite di Traversella, undici sono saturate dal complesso delle basi ed una, secondo l'ipotesi prima fatta, dal fluoro allo stato di fluoridrina silicica, rimarrebbero ancora libere 7 molecole di silice, numero molto prossimo a quello che corrisponde alla quantità di acqua che si elimina dopo 285°, per cui si potrebbe ammettere che appunto queste sette molecole di silice e di acqua siano associate allo stato di acido metasilicico. Invece le altre 12 molecole di acqua che si eliminano fra 100° e 285°, (11,84 secondo i sopraindicati rapporti) potrebbero rappresentare altrettante molecole di acqua contenute nella apofillite allo stato di acqua di cristallizzazione, la cui eliminazione molto lenta nel primo tratto 100°. 200°, diverrebbe invece rapidissima nel tratto 200°. 285°.

Per cui si ricaverebbe per l'apofillite di Traversella la seguente formola di struttura:



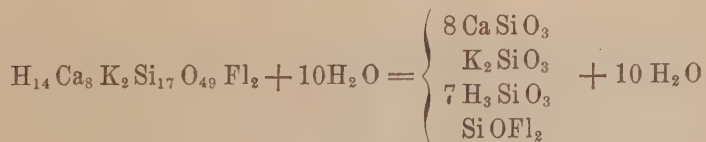
Questi risultati concordano sufficientemente, per quanto riguarda questa differenza di contegno dell'acqua, con quanto Hersch ⁽¹⁾ osservò nell'apofillite di Berghen Hill, a parte alcune differenze nelle perdite ottenute a temperature intermedie; egli ottenne infatti le seguenti perdite successive:

100°	160°	200°	240°	275°	300°	calor rosso
0,11 %	0,38 %	0,77 %	2,03 %	9,08 %	9,91 %	16,61

L'andamento di queste perdite indicato nella figura 2, dalla linea OB lascia pure vedere una sensibile deviazione nel tratto 200°. 275°; se poi si tien conto che l'analisi di detta apofillite porta approssimativamente alla formola:



è facile di vedere come si potrebbe dare ad essa una interpretazione del tutto analoga a quella da me data per l'apofillite di Traversella, solo ammettendo che il fluoro entri a costituire una molecola di fluoruro di silicile, potendosi essa esprimere nel modo seguente:



(¹) Inaug. Dissert. Zurich. 1887, pag. 25.

essendo la quantità di acqua che si elimina al disotto di 275° pari a 9,5 molecole, numero molto prossimo a 10 che appunto rappresenta, nella sopra-riportata formola, la quantità di molecole di acqua che ancora rimarrebbe libera dopo saturata, allo stato di acido metasilicico, tutta la silice residua.

Non tutti gli autori sono però concordi nell'ammettere queste differenze di contegno nell'acqua dell'apofillite; alcuni anzi la escludono del tutto come Rinne ⁽¹⁾ ed Hennig ⁽²⁾ e degno di nota è il fatto che quest'ultimo ottenne per la apofillite di Berghen Hill dei valori differenti da quelli ottenuti da Hersch per quanto riguarda sia le singole perdite alle varie temperature sia per quanto si riferisce all'andamento complessivo di queste perdite; invero egli ottenne i valori seguenti:

200°	235°	267°	310°	350°	400°	calor rosso
1,15 %	3,75 %	6,32 %	9,20 %	12,50 %	16,85 %	18,10

Considerando l'andamento di queste perdite, rappresentato nella figura 2 dalla linea OC si nota come essa non presenta, nel tratto 200° . 400° , a differenza di quanto osservò Hersch, nessuna traccia di deviazione, rimanendo quindi del tutto giustificata la conclusione a cui giunge Hennig della mancanza di qualsiasi differenziazione nell'acqua dell'apofillite.

Però i dubbi che, in causa di questi differenti risultati, si possono avere per l'apofillite di Berghen Hill non sono possibili per quella di Traversella per il fatto evidente, osservando sia la tabella da me riportata sia la curva AB ad essa corrispondente, che tanto i valori da me ottenuti nel primo saggio quanto quelli avuti nel secondo obbediscono ad una stessa legge, il che sarebbe certamente difficile ad avverarsi nel caso in cui i risultati fossero parzialmente erronei.

Un'altra prova della reale presenza di un differente comportamento nell'acqua dell'apofillite consiste nelle esperienze di Rammelsberg ⁽³⁾ e di Dölter ⁽⁴⁾ i quali dimostrarono come l'apofillite parzialmente disidratata possa riassorbire una parte dell'acqua eliminata.

Io ho ripetuto queste esperienze con l'apofillite di Traversella; due porzioni del minerale finamente polverizzate vennero portate rispettivamente alle temperature di 260° e di 400° , poscia vennero lasciate durante 25 giorni in un essiccatore contenente una certa quantità di acqua; in seguito esse vennero pesate dopo essere state portate alla temperatura di 100° - 105° per alcune ore.

⁽¹⁾ *Beitrag zur Kenntniss der Natur der Krystallwasser*. N. Jahrb. für Min. ecc. (1899) I, pag. 1.

⁽²⁾ *Apophyllit von Sulitelma*. Geol. Fören. Förhand. Stock. (1899) XXI, pag. 391.

⁽³⁾ *Hand. der Mineralchemie* (1875) pag. 607.

⁽⁴⁾ *Ueber die Künstliche Darstellung und der Chemische Constitution einiger Zeolithe*. Neues Jahrb. für Min. ecc. (1890) I, pag. 118.

Ottenni i seguenti risultati.

	Perdita iniziale	Perdita rimanente dopo esposiz. all'aria umida	Acqua rias- sorbita
1 ^a porzione (260°)	6,50 ‰	4,09 ‰	2,41 ‰
2 ^a " (400°)	16,03 "	13,49 "	2,54 "

Da questi valori si deduce non solo come l'apofillite sia capace di riasorbire parzialmente l'acqua perduta ma come pur anche, nei limiti della mia esperienza, la quantità di acqua assorbita sia uguale tanto nel caso in cui la disidratazione iniziale sia stata solo parziale quanto nel caso in cui sia stata totale.

Mineralogia. — *Sulla radioattività della cotunnite vesuviana.*

Nota di FERRUCCIO ZAMBONINI, presentata dal Socio STRÜVER.

Negli ultimi anni sono state eseguite diverse ricerche sulla radioattività delle lave e dei tufi di alcune regioni vulcaniche italiane. Così Elster e Geitel ⁽¹⁾ studiarono dei materiali di Ischia, di Capri e dell'Etna; Sella e Martinelli ⁽²⁾ le pozzolane, i tufi e le lave dei dintorni di Roma; Trovato Castorina ⁽³⁾ i prodotti vulcanici della regione etnea. Questi studi hanno messo fuori di dubbio la radioattività, in generale assai debole, dei materiali esaminati.

Per il Vesuvio le ricerche specialmente di Becker ⁽⁴⁾, Nasini e Levi ⁽⁵⁾, Scarpa ⁽⁶⁾ e Kernot ⁽⁷⁾ hanno condotto al risultato che i prodotti delle vecchie eruzioni possiedono una radioattività maggiore di quella dei prodotti della eruzione dell'aprile 1906. Tra questi ultimi, poi, le ceneri ed i lapilli sembrano essere, in genere, più fortemente radioattivi delle lave, che, anzi, secondo il prof. Nasini, sarebbero da considerarsi come inattive (radioattività minore di 1.10^{-4} rispetto all'uranio).

In queste esperienze, però, lo studio della radioattività è stato limitato, almeno per quanto mi è noto, alla roccia in massa e non si è esteso ai singoli minerali costituenti, nemmeno nei casi in cui ciò era possibile. Pure la necessità di uno studio di questo genere (affermata esplicitamente già dal

(1) Physik. Zeitsch., 1904, V.

(2) Rendiconti R. Accad. dei Lincei 1904, serie 5^a, X 2° sem., XIII, 156. Ibidem 441.

(3) Nuovo Cimento 1905, serie 5^a, X, 198.

(4) Annalen der Physik, 1906, serie 4^a, XX, 634.

(5) Rendiconti R. Accad. dei Lincei, 1906, serie 5^a, 2° sem., XV, 391.

(6) Rendiconti R. Accad. dei Lincei, 1907, serie 5^a, 1° sem., XVI, 44.

(7) Rendiconti R. Accad. delle Scienze Fis. e Mat., Napoli, 1906, serie 3^a, XII, 462.

prof. Nasini) risulta chiara dalle ben note esperienze di R. J. Strutt ⁽¹⁾ sulla radioattività delle rocce eruttive e dei minerali che più frequentemente in esse si rinvenivano. Da questi studi dello Strutt emerge che alcuni minerali petrograficamente importanti, come il quarzo ed il rutilo, non contengono radio, mentre, invece, parecchi zirconi sono, relativamente, abbastanza attivi. Così pure lo Strutt ha dimostrato che, in uno dei graniti da lui studiati, la parte avente peso specifico $> 2,8$ (corrispondente in peso all' 11,5 %) possedeva più della metà della radioattività totale della roccia.

Tra i minerali che si formano nelle fumarole del Vesuvio, uno mi è sembrato particolarmente degno di studio, ed è la cotunnite. Questo minerale è, infatti, abbastanza frequente e fu osservato in tutte le eruzioni avvenute dal principio del secolo passato a quella dell'aprile dello scorso anno. Dalla cotunnite si può dire, inoltre, che provengono gli altri minerali di piombo finora accertati al Vesuvio (pseudocotunnite, anglesite, linarite, galena). Ora è noto che il piombo si trova in tutti i minerali radioattivi e che, secondo Boltwood ⁽²⁾ e Rutherford ⁽³⁾ è da ritenersi come il prodotto finale della disintegrazione dell'uranio. A ciò è da aggiungere che la piromorfite di Issy-l'Évêque è stata riconosciuta da Danne ⁽⁴⁾ come fortemente radioattiva (la sua attività in certi campioni è molte volte superiore a quella dell'uranio).

Non sembrava, perciò, del tutto improbabile che la cotunnite vesuviana fosse radioattiva. Ed un'esperienza preliminare confermò pienamente questa supposizione, dimostrando che la cotunnite dell'ultima eruzione possiede un'attività molto spiccata.

Pensai allora di eseguire qualche esperienza più precisa, per avere un'idea abbastanza approssimata della radioattività di questo minerale. Grazie alla cortesia del prof. Cantone, che vivamente ringrazio, potei servirmi dell'elettroscopio Curie posseduto dall'Istituto Fisico dell'Università di Napoli. La cotunnite adoperata proveniva da una fumarola apertasi di fronte alla Punta del Nasone ai primi di aprile di quest'anno: era stata subito staccata dalla roccia e conservata in una camera dell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Napoli nella quale non vi erano sostanze radioattive. Come materiale di confronto adoperai del nitrato di uranile cristallizzato ($\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$) purissimo. Tanto la cotunnite che il nitrato di uranile furono adoperati in polvere fina e in quantità uguale in peso. Da numerose esperienze concordanti è risultato che la radioattività della cotunnite è dell'ordine di grandezza di quella del nitrato di uranile, ed, anzi, sembra essere alquanto più forte. Ponendo uguale ad uno la radioattività del nitrato di uranile, quella della cotunnite risulterebbe uguale ad 1,1.

(1) Proc. Royal Soc. London LXXVIII, serie A, 150.

(2) Philos. Mag., 1905, serie 6^a, IX, 599.

(3) Philos. Mag., 1905, serie 6^a, X, 290.

(4) Le Radium, 1905, II, 33.

Ho creduto non inutile esaminare se anche la cotunnite di precedenti eruzioni è radioattiva. Grazie alla cortesia del prof. Eugenio Scacchi ho potuto adoperare la cotunnite formatasi nelle fumarole del cratere del 1872, e che Arcangelo Scacchi aveva isolato dalla roccia nello stesso anno e chiusa in un tubetto di vetro. Anche questa cotunnite del 1872 è radioattiva e la sua attività è sensibilmente uguale a quella della cotunnite formatasi nell'aprile di quest'anno.

Dalla tabella riassuntiva pubblicata dallo Scarpa, risulta che, ad eccezione delle terre di Capri studiate da Elster e Geitel, la radioattività dei prodotti vulcanici italiani finora studiati è compresa fra circa un millesimo ed un mezzo decimillesimo di quella dell'uranio. La radioattività della cotunnite vesuviana è, quindi, enormemente più grande di quella di tutti i prodotti vulcanici italiani fin qui esaminati.

È certo che di questa forte attività della cotunnite del Vesuvio deve essere tenuto conto per spiegare la radioattività dei lapilli e delle ceneri vesuviane, che è, tenendo conto dei dati di Scarpa, da duemila a dodicimila volte minore (in cifre tonde). E l'ipotesi che la radioattività delle ceneri e dei lapilli vesuviani possa dipendere, almeno in buona parte, dalla presenza in essi di quantità assai piccole di cotunnite o di altri composti di piombo da questa derivati risulta suffragata da un fatto notevole, osservato concordemente da Scarpa e da Kernot, che, cioè, la radioattività delle ceneri cadute su Napoli in seguito all'ultima eruzione è molto minore di quelle raccolte sul cono del vulcano. Ora è evidente che la cotunnite, a causa del suo peso specifico considerevole, appartiene a quei materiali del nostro vulcano che più difficilmente possono essere trasportati a distanza.

È inoltre da osservare che dalla presenza in esse della cotunnite può dipendere anche la radioattività delle lave. Infatti, sopra tutto per merito di Arcangelo Scacchi, si sa che molte volte la cotunnite si è osservata sulle lave vesuviane. In generale, questo minerale è più frequente nelle fumarole del cratere che in quelle delle lave, il che può spiegare la minore radioattività di queste ultime in confronto delle ceneri e dei lapilli che rappresentano per la maggior parte materiale vecchio del gran cono. Per quel che riguarda le lave dello scorso anno, tanto scarsamente radioattive, credo opportuno far notare che in nessuno dei molti campioni che ne ho visto ho potuto riconoscere la cotunnite macroscopica. Non è, quindi, improbabile che le lave di quest'anno sieno meno ricche in piombo di quelle di eruzioni precedenti.

Con queste osservazioni io non pretendo affatto di asserire in modo assoluto che la radioattività dei prodotti vesuviani dipende dai composti di piombo in essi contenuti, tanto più che non sappiamo nemmeno se la tenue attività della lava dell'ultima eruzione dipenda semplicemente dal fatto che solo da poco tempo era passata, quando fu esaminata, dallo stato liquido al

solido ⁽¹⁾, e che, d'altra parte, come giustamente nota lo Scarpa, « torna lecito il dubbio che varie sieno le sostanze radioattive » presenti nei materiali vesuviani. Ho creduto, però, non inutile richiamare l'attenzione delle persone più di me competenti su quanto può dedursi dal fatto che un minerale abbastanza frequente tra i prodotti del Vesuvio presenta una radioattività assai forte, paragonabile a quella di quei minerali uraniferi che contengono circa il 45 % di uranio.

In generale si è osservato che i minerali radioattivi contengono uranio, ed anzi la radioattività è proporzionale al tenore in questo metallo. Ora nè la piromorfite studiata dal Danne, nè la cotunnite vesuviana contengono uranio in quantità apprezzabili. Il Danne ha cercato di spiegare il fatto da lui osservato, supponendo che il radio sia stato apportato alla piromorfite dalle acque radifere della regione, che sono effettivamente radioattive. È evidente che questa spiegazione, che mi sembra, del resto, fortemente dubbiosa anche per la piromorfite di Issy-l'Évêque, poichè è, infatti, strano che le acque radifere abbiano deposto il radio soltanto nei punti contenenti minerali di piombo, tanto che mi pare assai più probabile l'ipotesi inversa, che, cioè, le acque debbano il loro contenuto in radio alla presenza di minerali radioattivi nella regione che esse traversano, non può affatto essere applicata alla cotunnite vesuviana. Nè io credo di poter avanzare delle ipotesi non fondate su alcun fatto, od una di quelle spiegazioni che nulla spiegano, come sarebbe, per esempio, il ritenere che il piombo prodotto dalla disintegrazione dell'uranio, possa, in condizioni opportune, conservare a se uniti i prodotti radioattivi della disintegrazione stessa.

Credo opportuno aggiungere che anche la galena formatasi nelle fumarole del cratere nel mese di maggio dello scorso anno ⁽²⁾ è fortemente radioattiva. Non ho fatto su questo minerale che poche esperienze preliminari su piccola quantità di cristalli rimasti per quasi un anno attaccati alla roccia sulla quale si deposero. Dalle misure eseguite risulterebbe che la galena vesuviana possiede una radioattività molto più forte di quella della cotunnite studiata.

(1) È questa una delle ipotesi avanzate dal prof. Nasini.

(2) F. Zambonini, Rendiconti R. Acc. Lincei, 1906, 2° semestre, pag. 235.

Zoologia. — *Sul ritmo dei cuori di due larve di Discoglossus, saldate insieme* ⁽¹⁾. Nota di LUIGI SANZO, presentata dal Socio B. GRASSI.

Nella presente breve Nota, che avrà presto seguito in un lavoro per esteso sullo stesso argomento, vengo a riassumere i risultati di ricerche intese a chiarire se e fino a qual punto due cuori, messi, coll'innesto di due organismi, in comunicazione tra loro, modifichino, in conseguenza di ciò, o continuino a mantenere indipendente il proprio ritmo.

Gli innesti, in numero assai rilevante — duemila e più quelli riusciti — vennero praticati tra due larve giovanissime di *Discoglossus pictus*, differenti per età e ritmo cardiaco, secondo i seguenti tipi:

Tipo I. In ciascuna delle due larve da innestare si asporta, con un taglio trasversale cadente a livello o in avanti della regione cardiaca, la parte anteriore e si mettono a combaciare i due pezzi posteriori, omonimamente od eteronimamente rispetto alle regioni dorsali e ventrali.

Tipo II. Ciascuna delle due larve si divide in due pezzi, l'uno anteriore e l'altro posteriore, con un taglio obliquo che dorsalmente cada a metà della lunghezza della larva e ventralmente in corrispondenza o poco in avanti della regione cardiaca. Si mettono a combaciare omo od eteronimamente, rispetto alle parti dorsali e ventrali, le due superficie di sezione dei due segmenti posteriori.

Tipo III. Il taglio dal punto più prominente dell'estremo cefalico va a cadere ventralmente a metà della lunghezza della larva; e si mettono a combaciare le due superficie di sezione dei due pezzi maggiori in modo che i due abbozzi caudali risultino o dalla medesima parte o in senso opposto come nel tipo II.

Tipo IV. Con un taglio sagittale si asporta dalla parte dorsale un lembo più o meno alto; e si fanno combaciare nel medesimo senso due larve così operate, per la superficie di sezione.

Tipo V. *Ricostruzione di una larva con due con tre o quattro cuori.*

a) *Ricostruzione di una larva a due cuori.* — Si tagliano trasversalmente due larve, l'una anteriormente e l'altra posteriormente alla sezione cardiaca e si fanno combaciare i due pezzi contenenti ciascuno l'abbozzo cardiaco, in modo da ricostruire una larva di forma normale la quale conterrà due cuori.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Palermo.

b) *Ricostruzione di una larva a tre cuori.* — Fra i due pezzi del tipo precedente Va s'intercala un terzo piccolo pezzo contenente un abbozzo cardiaco. Tale pezzo si ottiene da una terza larva fra due tagli trasversali cadenti l'uno al limite anteriore, l'altro al limite posteriore della regione cardiaca; e se ne fanno combaciare, omonimamente alle regioni dorsali e ventrali, l'anteriore e la posteriore superficie di sezione rispettivamente colle due superficie di sezione dei segmenti cefalico e caudale della larva del tipo Va.

c) *Ricostruzione di una larva a quattro cuori.* — S'interpone fra il segmento cefalico o caudale e il segmento mediano del tipo Vb un quarto pezzo ottenuto ed orientato analogamente al terzo.

Col progressivo sviluppo del complesso risultante dai vari tipi di innesto, vengono fra l'un cuore e l'altro a stabilirsi delle vie di comunicazioni le quali possono essere dirette o indirette secondo che i due cuori siano saldati tra loro o, essendo più o meno lontani, comunichino tuttavia per il fatto che fra i due rispettivi sistemi vascolari si stabiliscono delle comunicazioni vasali.

Cuori a comunicazione indiretta:

a) I due cuori non raggiungono l'isocronismo, almeno per tutto il periodo dell'innesto, da 1 a 4 mesi. A ciò fa riscontro uno sviluppo assai limitato delle vie di comunicazioni fra un sistema vascolare e l'altro. Tale risultato è comune a ciascuno dei suaccennati tipi d'innesto; fu costante in tutti gli innesti fatti secondo il tipo Va, Vb, Vc.

b) Le pulsazioni di uno dei due cuori diventano isocrone con quelle dell'altro cuore; ma l'isocronismo può facilissimamente cessare al più lieve stimolo, per ritornare dopo un tempo variabile in rapporto alla modalità dello stimolo stesso e dell'innesto. Tale risultato fu più frequente negli innesti tipo IV.

Cuori a comunicazione diretta.

a) L'isocronismo fra i due cuori può permanentemente essere raggiunto; le pulsazioni però non coincidono per fase, sebbene in molti casi i flussi arteriosi nell'una e nell'altra larva sincronizzino stabilmente fra loro. Il fenomeno è fisicamente spiegabile colla simultaneità di efflusso in due vasi derivanti da una cavità comune ripiena di liquido sul quale agiscono due stantuffi in fase diversa. Gli innesti tipo III danno, fra gli altri innesti, più frequentemente tale risultato.

b) Le pulsazioni dei due cuori non solo sono di uguale durata ma coincidono anche per fase. Tale stato funzionale fu raggiunto solo una volta (innesto tipo III) in duemila e più innesti riusciti. In questo caso i due

ventricoli formavano un'unica cavità la cui parete si mostrava divisa per una linea di sutura in due parti simmetriche da ciascuna delle quali partiva un bulbo arterioso. Così con l'esperimento veniva anche confermata l'ipotesi del Loeb che « se si riuscisse a saldare insieme completamente due cuori essi batterebbero sincronamente »⁽¹⁾.

Zoologia. — *Contrazioni ritmiche antiperistaltiche nell'intestino terminale di larve di Discoglossus pictus.* Nota di LUIGI SANZO, presentata dal Socio B. GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

⁽¹⁾ J. Loeb, *Fisiologia comparata del cervello e psicologia comparata*, pag. 32. (Traduzione italiana del prof. F. Raffaele. Editore Remo Sandron, Palermo, 1907).
